

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

## 全新二維格狀式空時碼(2-STTC)的解析性設計

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC91-2213-E-034-005-

執行期間：91年08月01日至92年07月31日

執行單位：中國文化大學電機工程學系

計畫主持人：劉宗慶

計畫參與人員：蔡修豪,許益賓,黃衍欽

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 92 年 10 月 6 日

**全新二維格狀式空時碼(2-STTC)的解析性設計**  
**The analytic design of 2-Space-Time-Trellis-Code (2-STTC)**  
**計畫編號：91-2213-E-034-005**  
**執行期限：91年8月1日至92年7月31日**  
**計畫主持人：劉宗慶 私立中國文化大學電機工程學系副教授**

**壹、中文摘要**

我們以解析性的方法設計了一些二維格狀式空時碼(2-STTC)，該碼使用 M-PSK 的方式調變並使用非對稱的方式增大與擴充 M，以得到最佳的碼增益。有別於其他碼，該碼為非均勻性且輸出入關係為非線性。解析性的分析與 Monte Carlo 的模擬皆證明我們的碼優於現存任何碼。

**貳、英文摘要**

This project deals with the use of transmit diversity scheme used in the third and/or the fourth generation wireless cellular system to improve the diversity gain and coding gain. Analytically, we have designed some optimal 2-Space-Time Trellis codes (STTCs) by M-psk constellation expansion, and the constellation can be asymmetric to reach its optimal coding gain. The resultant code is geometrically non-uniform. We show that when the constellation is symmetric and the size equals to the number of states, our design reduces to Tarokh's uniform code. Simulations are done to compare our design to the known codes. It is proved that constellation expansion design outperforms state expansion design in both Frame Error Rate (FER) and decoding complexity. Our 4 states asymmetric 8-PSK 2-STTC can achieve the similar performance of Tarokh's 32 states 4-PSK 2-STTC.

**參、計畫緣由與目的**

在無線蜂巢系統中，一般來說行動台無法攜帶太多的天線，一個簡化的系統於基地台使用多根天線，行動台使用單根天線成為一設計探討的架構。Tarokh[1]曾提出一 4-State、4-Phase 的 2-STTC 碼，此碼具有 Geometrically Uniform 的特性，亦即在搜尋最佳碼的設計中，所有的碼的測試可僅針對其全零碼字的發射與其他可能錯誤的接收碼字的比較即可。而不必針對非零的每一個碼字對做測試。我們預測此種 Uniform 特性不保證為最佳性能，僅能在搜尋上可減少大量的運算而得到適當不錯的碼，因此 Bäro[4]用疲乏式搜查提出了另一種 non-uniform 碼，在接收天線高於一根以上時有較佳的性能，但用單根天線時，性能稍差。無論是 Tarokh 或 Bäro，編碼器的 Code generator 皆為線性的，即輸入和輸出的關係為線性的關係，在一維的 Trellis Code 的設計中線性關係並無法增加信號間的隔離度(Separation) [5]，這對 Trellis Code 的設計是重要的，但對向量式的 Trellis Code 此種影響關係不是很明顯。當下問題是：用單根接收天線下，在不改變狀態數目，是否存在其他的性能更好的 Non-uniform Code? 是否除了在疲乏式搜索以外有較解析性的設計方法? 本人於去年提出一全新的設計方法稱為"編碼函數值域擴充法"，將編碼器視為一有限狀態機(finite state machine)，於固定的 state 數下我們擴充其輸出值域的範圍，以便增加信號的"隔離度"，並滿足兩個設計的 Criterion (rank 及 Product)，其產生的編碼器輸入和輸出的關係為非線性，此輸出再經調變(PSK, PAM 等)去發射，如此亦等同於 Constellation 的擴充。所設計的碼用第一根天線控制 Coding Gain 的增加，第二根天線控制 diversity 的增加。在 coding gain 增加部份，我們特別提出如一維 Multiple TCM [6] 的設計使用 Asymmetric Constellation，以找到最大的碼增益。

**肆、研究方法與步驟**

Space Time coding 最先由 AT&T 研究室的 Tarokh [1] 提出，其結合通道碼與多重天線將信號以不同的通道碼分別發射於每一根天線。於 fast fading channel 中，假設發射機與接收機間的 fading 係數相互獨立，若如下之碼字被傳送於  $n_T$  根發射天線：

$$c = \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_l, \quad \mathbf{c}_j = (c_j^1, c_j^2, \dots, c_j^{n_T})^T,$$

而 ML(Maximum Likelihood)解碼器錯誤的(Erroneously)解碼為

$$e = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_l, \quad \mathbf{e}_j = (e_j^1, e_j^2, \dots, e_j^{n_T})^T,$$

[1]中定義差分矩陣(Difference Matrix)

$$B(c, e) = \begin{bmatrix} e_1^1 - c_1^1 & e_2^1 - c_2^1 & \cdots & e_r^1 - c_r^1 \\ e_1^2 - c_1^2 & e_2^2 - c_2^2 & \cdots & e_r^2 - c_r^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1^{n_r} - c_1^{n_r} & e_2^{n_r} - c_2^{n_r} & \cdots & e_r^{n_r} - c_r^{n_r} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

距離矩陣(distance matrix)為

$$A(c, e) = B(c, e)B^H(c, e). \quad (2)$$

如果於接收端 CSI(Channel State Information)為已知，傳輸媒介為 Rayleigh fading channel，Tarokh 導出 Pairwise error probability 的 Chernoff Bound 如下

$$P(c \rightarrow e) \leq \left( \prod_{i=1}^r \lambda_i \right)^{-n_R} \left( \frac{E_s}{4N_0} \right)^{-m_R}, \quad (3)$$

$\lambda_i, i=1, 2, \dots, r$  為距離矩陣  $A(c, e)$  的非零特徵值(eigenvalues),  $r$  為  $A(c, e)$  或  $B(c, e)$  的秩(rank),  $n_R$  為接收天線的數目。因此差分矩陣的秩決定漸進錯誤率的斜率，也就是 STC 的架構中影響 diversity gain 的部份。特徵值的乘積則影響 Coding Gain 的部份。因此一個理想的 STC 的設計目標包含如下兩大部份：

(1) Rank Criterion: 需達到對任一組字碼儘量使  $B(c, e)$  具有比較高的秩(Rank)。當  $A(c, e)$  為 Full Rank 時，Diversity Advantage 為最大值 (i.e.,  $n_T \times n_R$ )

(2) Product Criterion: 對所有待搜尋的碼中找出  $A(c, e)$  的最小非零特徵值乘積需為最大。

## 2-SPACE-TIME-TRELLIS-CODES

對一 MISO 系統，考慮由兩根 ( $n_T=2$ ) 發射天線一根 ( $n_R=1$ ) 接收天線的系統，Constellation expansion 採用 M-PSK 調變，從第  $k$  根天線發射的  $l$  個編碼序列符號 (M-psk),  $c^k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_l^k)$ ，其中  $c_i^k = \exp\{j * 2 * \pi / M * \Re(x_i^k)\}$   $x_i^k \in \mathfrak{S}_M$ ， $\mathfrak{S}_M$  為函數值域集合。例  $\mathfrak{S}_8 = \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$  其 size(cardinal) 為 8。 $x_i^k$ ，表編碼器有限狀態機的輸出，為輸入位元與狀態位元的函數。 $\Re(\cdot)$  為一對一映射函數。於時間  $t$  在行動台的單一接收天線收到的信號為  $r_t$

$r_t = \sum_{k=1}^2 r_k c_t^k + y_t$ ， $y_t$  為白雜訊序列。 $r_k$  為從發射天線  $k$  至接收天線的 fading 係數，若已知  $r_k$ ，Maximum Likelihood (ML) 格狀碼解碼等效於求在 Euclidean space 中之路徑滿足以下之目標

$$\min \sum_{t=1}^l \| r_t - \sum_{k=1}^2 r_k c_t^k \|^2 \quad (4)$$

### The analytic Representation of 2-STTC

根據 Calderbank-Mazo[7]， $x_i^k$  可表為一解析性的非線性函數關係：

$$x_i^k(b_1, b_2, \dots, b_n) = d^{k(0)} + \sum_i d^{k(1)} b_i + \sum_i d^{k(2)} b_i b_i + \sum_{i,j} d^{k(3)} b_i b_j b_i + \dots + d^{k(n)} b_1 b_2 \dots b_n \quad (5)$$

$b_1, \dots, b_n \in \{-1, 1\}$  為輸入及狀態位元。根據 Trellis Transition diagram，代入輸出輸入關係，我們可導出係數  $d^{k(n)}$ 。矩陣表示法如下：表  $f_k = [x_i^k(1, 1, \dots, 1), x_i^k(-1, 1, \dots, 1), \dots, x_i^k(-1, -1, \dots, -1)]^T$   
 $f_k = B d_k$ ， $d_k = [d^{k(0)}, d_1^k, \dots, d_n^k, d_{12}^k, d_{23}^k, \dots, d_{(n-1)n}^k, \dots, d_{1 \dots n}^k]^T$   $B$  為 Hadamard 正交矩陣 ( $B B^T = 2^n I$ )，其列為  $[1, b_1, b_2, \dots, b_n, b_1 b_2, b_2 b_3, \dots, b_1 b_2 \dots b_n]$  代入各種輸入值所形成，而其順序與  $f_k$  中輸入的排列一樣。

我們表示  $\mathbf{f} = [f_1 \ f_2]$  解出

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2^n} \mathbf{B}^T \mathbf{f} \quad (6)$$

根據  $\mathbf{d}$  我們求得輸出與輸入的函數關係，即編碼器的架構。

**非對稱映射策略**

舉例若  $x_i^k \in \mathcal{S}_8$ ，如圖 1 的 8-PSK 調變輸出的 constellation。

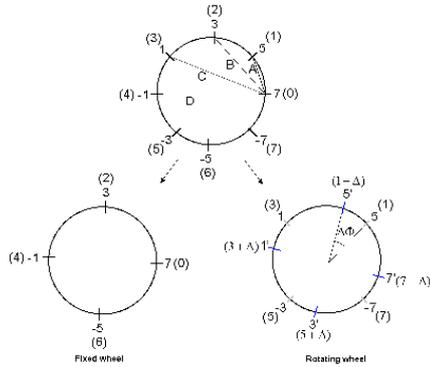


圖. 1 8-PSK constellation 的集合切分  
對應於”函數值域”集合的 size 為 8  
我們指定

$$\mathcal{R} : \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\} \rightarrow \{7 + \Delta, 6, 5 + \Delta, 4, 3 + \Delta, 2, 1 + \Delta, 0\}$$

一對一的映射， $\Delta$  的範圍界於  $0 < \Delta < 7$ 。因  $\Delta w = 2f/8 * \Delta$ ，所以在 8-PSK 中相位的改變為

$$0 < \Delta w < \frac{7f}{4}$$

。如圖 1 所示， $\{-5, -1, 3, 7\}$  表左下固定圓，而  $\{-7, -3, 1, 5\}$  表右下旋轉圓，對不同  $\Delta w$  值

兩圓合起來形成一非對稱式的 8-PSK 調變。我們逆時針從 0 到  $\frac{7}{4}f$  範圍間旋轉右圓以找尋最佳的碼增益。當  $\Delta$  為 1, 3, 5 或 7 時 8-PSK 縮減為 4-PSK，同時當  $\Delta = 0$  時函數值域切分即如圖 1 上面的圓，此時為對稱式 8-PSK。

**2-sttc 4 states 8-PSK/16-PSK 的設計實例**

state bits		b1 b2		input bits					
b3	b4	1	1	1	-1	-1	-1		
1	1	5	-1	-11	5	-3	-7	13	11
1	-1	11	15	5	-11	3	9	-13	5
-1	1	7	9	9	-3	-15	-15	1	3
-1	-1	-1	7	15	13	9	1	7	-13

↑ Ant1    ↓ Ant2    transmitted symbols

如圖 1 中 A,B,C,D 表圓周上各 indexes 間的距離，表 1 為我們提出的設計。 $b_3$  與  $b_4$  為  $b_1$  與  $b_2$  的延遲值，從表 1 中，天線 1 依

輸入位元與所在狀態位元的不同而發射 index  $\{7, 3, -1, -5\}$  或  $\{5, 1, -3, -7\}$  QPSK 組。這種設計安排是依據 Set Partition 法則以保證若有錯誤解碼發生時具有最大的距離。這和傳統一維 multiple TCM 設計類似。一旦天線 1 編碼器被決定，天線 2 的輸出必需依某些法則限制以使得距離矩陣  $\mathbf{A}$  為全秩。

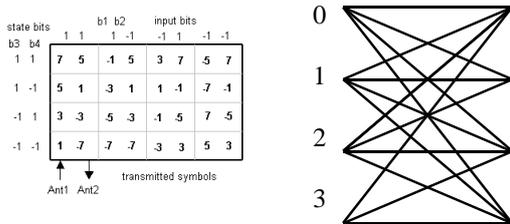


表 1. 2-STTC 4-state 8-Phase 的設計

state bits		b1 b2		input bits					
b3	b4	1	1	1	-1	-1	-1		
1	1	3	3	3	1	3	-1	3	-3
1	-1	1	3	1	1	1	-1	1	-3
-1	1	-1	3	-1	1	-1	-1	-1	-3
-1	-1	-3	3	-3	1	-3	-1	-3	-3

↑ Ant1    ↓ Ant2    transmitted symbols

顯而易見此

編碼器有 4 個狀態但有 8 不同的輸出值，因此發射的 constellation 依所在的狀態而定。天線 1 在狀態 0 與狀態 2，依不同的輸入位元輸出 constellation  $\{-1,-5,3,7\}$ ，在狀態 1 與狀態 3 輸出 constellation  $\{-3,-7,1,5\}$ 。我們來看圖 2. 中於起始狀態的發散分支：

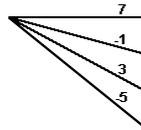


圖 2. 起始狀態的發散分支

分支上的數字表 QPSK 架構上的相位切分，從圖 1. 及表 1. 比對我們可看出對天線 1  $\mathbf{B}(c,e)$  中  $|e_1^1 - c_1^1|$  可能的值為 B 與 D。最終狀態結合於狀態 0 的分支如圖 3. 所示：

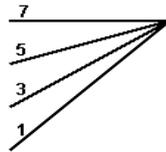


圖 3 最終狀態結合於狀態 0 的分支

從圖 3,  $|e_1^1 - c_1^1|$  可能值的範圍為 A, B 與 C。同樣的  $|e_1^2 - c_1^2|$  可能值的範圍為 A 或 0,  $|e_2^2 - c_2^2|$  可能值的範圍為 B 或 D。代入這些可能值的範圍  $\mathbf{B}(c,e)$  永遠是全秩。同樣的方法可運用到 16-phase 的設計如表 2. 所示。

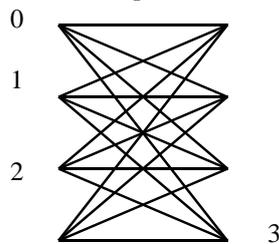


表 2. 2-STTC 4-state 16-Phase 設計

天線 1 依不同的輸入與狀態位元，發射 4 組 QPSK。每一組集合切分為  $\{5,-11,-3,13\}$ ,  $\{11,-5,3,-13\}$ ,  $\{-7,9,-15,1\}$  與  $\{-1,15,-9,7\}$ ，集合切分目地得到最大的隔離以增加碼增益。同樣的天線 2 的輸出被適當的被設計使得距離矩陣為全秩。同樣的法則設計 2-STTC 4-State 4-Phase 的碼，其結果和 Tarokh 的 uniform code 一樣[1].

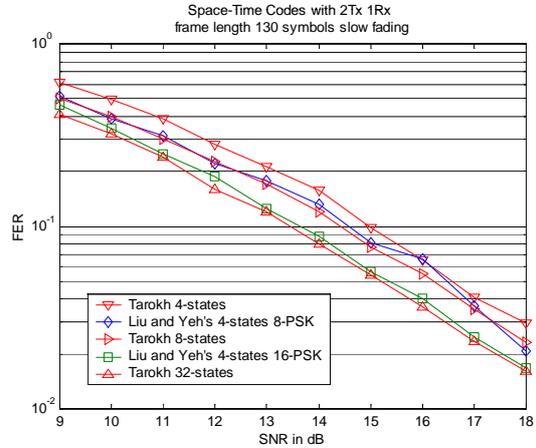
表 3. 2-STTC 4-state 4-Phase design (Tarokh)

從(5)的 Calderbank-Mazo 的解析性表示式 ( $d^{k(0)}$  預選為 0), 我們解得

$$d_{-4} = \frac{1}{2^n} B^T f = \begin{bmatrix} 0012000000000000 \\ 1200000000000000 \end{bmatrix}^T,$$

$$d_{-8} = \frac{1}{2^n} B^T f = \begin{bmatrix} 0201220200-20000 \\ -10310110020 0-200 \end{bmatrix}^T \text{ 與}$$

$$d_{-16} = \frac{1}{2^n} B^T f = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 & 2 & -2 & -2 & 6 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 1 & -2 & -2 & 2 & -6 & 2 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T$$



三種設計範例的編碼 generator 矩陣。

對 4-PSK (Tarokh)，輸入/輸出函數為線性，但對 8-PSK 與 16-PSK 輸入/輸出函數為非線性。

$$\begin{cases} x_1^1 = b_3 + 2b_4 \\ x_1^2 = b_1 + 2b_2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1^1 = 2b_2 + b_4 + 2b_1b_2 + 2b_1b_3 + 2b_2b_3 - 2b_1b_2b_3 \\ x_1^2 = -b_1 + 3b_3 + b_4 + b_1b_3 + b_1b_4 + 2b_3b_4 - 2b_1b_3b_4 \end{cases} \begin{cases} x_1^1 = -b_4 + 2(b_1 - b_2 + b_1b_2 - b_1b_3 - b_1b_4 + 3b_2b_3 - b_2b_4 \\ \quad + b_3b_4 + b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 - b_1b_3b_4 - b_2b_3b_4 + b_1b_2b_3b_4) \\ x_1^2 = b_1b_2 + 2(b_1 + b_3 - b_4 + b_1b_2 - b_1b_3 - b_1b_4 + b_2b_3 - 3b_2b_4 \\ \quad + b_3b_4 + b_1b_2b_3 + b_1b_2b_4 + b_1b_3b_4 - b_2b_3b_4 - b_1b_2b_3b_4) \end{cases}$$

式子中  $b$ 's 表  $b(t)$ 's.

### 伍、結果與討論

對每一 SNR 值，1000 隨機序列輸入編碼器，每一框的長度包含 130 符號，每一時間傳輸兩個 bits，Viterbi 解碼使用 (4) 式，若碼框裡有任何的錯誤符號發生即被認定為錯誤框，我們對 4-phase (Tarokh)、8-phase 與 16-phase 設計模擬做比較如下，

Fig. 4. 在 slow fading 下 FER 的性能比較

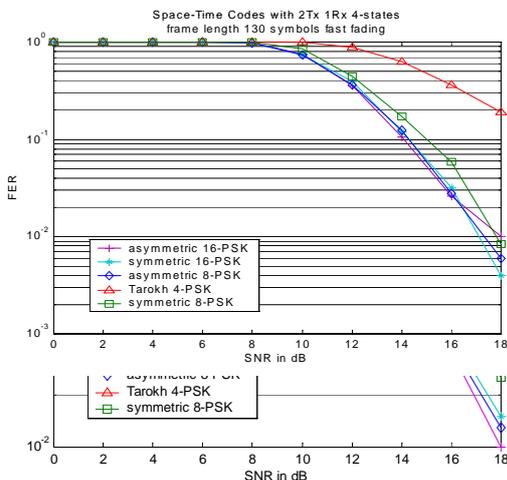


Fig. 5. 在 fast fading 下 FER 的性能比較.

其中非對稱式 8-PSK 與 16-PSK 於 slow fading 的最佳值發生在  $\Delta\omega = 13f/16$  與  $\Delta\omega = 7f/64$ ；於 fast fading 發生在  $\Delta\omega = f/2$  與  $\Delta\omega = 85f/64$ 。

圖 6. The 8-phase and 16-phase 設計與 Tarokh's higher states 設計之比較

從以上的討論可以看珠出，我們只要做函數值域擴充，經適當的設計皆可找出比現有碼更佳的结果，較低的錯誤率，圖 6. 對稱式函數值域擴充 4 state 16-phase 設計已可達到 Tarokh 32 state 的性能，但我們的方法可節省指數量的解碼運算時間。以上的設計結果並不是唯一，且非對

稱 Constellation 的設計是先找到較佳的對稱式設計以後，再去旋轉圖 1. 中的旋轉圖以求最佳值。有幾個方向待釐清: 多根接收天線甚或高於兩根發射天線時，設計的複雜度與可行性，留待未來進一步探討。

### 參考文獻

- [1] V. Tarokh, N. Seshadri, and A.R. Calderbank, "Space-time codes for high data rates wireless communications: Performance criterion and code construction," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, pp. 744-765, March 1998.
- [2] S. Alamouti, "Space block coding: A simple transmitter diversity technique for wireless communications," *IEEE J. Select Areas. Commun.*, vol. 16, pp. 1451-1458, Oct. 1998
- [3] R. Wichman and A. Hottinen, "Transmit Diversity WCDMA system," *Tech. Rep.*, Nokia Research Center, 1998
- [4] S. Bärö, G. Bauch, and A. Hansmann, "Improved codes for space-time trellis coded modulation," *IEEE Communication letter*, pp. 20-22, Jan. 2000
- [5] Ezio Biglieri et.al "Introduction to trellis-coded modulation with applications" pp. 83-84 Macmillan Publishing Company
- [6] Ezio Biglieri et.al "Introduction to trellis-coded modulation with applications" pp. 259-288 Macmillan Publishing Company
- [7] A.R. Calderbank and J.E. Mazo, "A new description of trellis codes," *IEEE Transaction on Information Theory*, vol. 30, pp. 784-791, Nov. 1984
- [8] G. Ungerboeck, "Channel coding with multilevel/phase signals," *IEEE Trans. Inf. Theory*, Vol. IT-28, pp. 56-67, Jan. 1982