

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

連桿組耦桿曲線與位置分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC93-2212-E-034-005-

執行期間：93年08月01日至94年07月31日

執行單位：中國文化大學機械工程學系

計畫主持人：鐘文遠

計畫參與人員：簡妥芸 (大專學生)

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 94 年 9 月 26 日

# 行政院國家科學委員會補助專題研究計畫成果報告

## 計畫名稱：連桿組耦桿曲線與位置分析

計畫類別： 個別型計畫       整合型計畫

計畫編號：NSC NSC93-2212-E-034-005—

執行期間： 93 年 8 月 1 日至 94 年 7 月 31 日

計畫主持人：鐘文遠

共同主持人：

計畫參與人員：簡安芸 (大專學生)

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告       完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：

- 赴國外出差或研習心得報告一份
- 赴大陸地區出差或研習心得報告一份
- 出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
- 國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢

涉及專利或其他智慧財產權， 一年  二年後可公開查詢

執行單位：中國文化大學機械工程學系

中 華 民 國 94 年 9 月 26 日

# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 連桿組耦桿曲線與位置分析

### Coupler Curves and Position Analysis of Linkage

計畫編號：NSC93-2212-E-034-005

執行期限：93年8月1日至94年7月31日

主持人：鐘文遠 中國文化大學機械工程學系

計畫參與人員：簡妥芸 中國文化大學機械工程學系

#### 一、前言

本計畫關於連桿組之位置分析，其步驟首先為將連桿組拆解為數個小連桿組，拆解處可為旋轉運動對或稜柱運動對。其次對於各小連桿組之拆解處的特定點或特定線，推導其耦桿點曲線或耦桿線曲線。最後再將各拆解處之兩運動曲線聯立求解以完成位置分析。

研究成果含 Assur 群中之平面五連桿組，且任一接頭可為旋轉運動對或稜柱運動對[Chung 2005a]。該類型機構可拆解為一組四連桿組及一根接地雙接頭桿。對於 Assur 群之七連桿組，則先推導出 Watt-I 及 Stephenson-I 之耦桿點曲線方程式[Chung 2005c; Chung 2005e]，進而完成七連桿組之位置分析，並可適用於所有單一自由度的八連桿組[Chung 2005d]。對於特定型態之連桿組，亦推得可迅速求得耦桿點曲線方程之次數及圓點數之方法[Chung 2005b]。

關鍵詞：耦桿點曲線、耦桿線曲線、圓點、旋轉運動對、稜柱運動對

#### Abstract

This project focuses on the position analysis of linkage. A linkage is dismantled into several sub-linkages at some joints that can be either revolute or prismatic. The algebraic curves that are the locus of the breaking points or lines are then derived. The intersection points of these curves for each dismantling point or line lead to possible solutions of the linkage.

The results begin with the analysis of the five-bar of Assur group. The strategy is to dismantle the mechanism into a four-bar and a binary link pivoted to the ground. Any joint can be either revolute or prismatic. For the position

analysis of seven-bar of Assur group, the linkage is dismantled into a binary link and a six-bar. The coupler curve equations of Watt-I and Stephenson-I six-bar are derived. The result can be applied to the position analysis of all Assur seven-link and 1 DOF eight-link. The method of efficiently deriving the orders and circularities of the coupler curves for some specific linkages is also developed.

**Keywords:** Coupler point curve, Coupler line curve, Circular point, Revolute joint, Prismatic joint

#### 二、前言及文獻探討

對於平面連桿組或平面之平行式操縱器，位置分析為其最基本之問題之一。其中，如最簡單之平面四連桿組，當指定輸入桿位置時，輸出桿之位置僅需使用一般熟知之 Freudenstein equation 便可求得。對於較複雜之連桿組，可寫出多個迴路方程式，再以如 Sylvester 消去法[Mcleod M. and Baart, L., 1998]聯立求解。由於多連桿組大多可視為 Assur 群演變而成[Galletti, C.U., 1986]，因而對 Assur 群作位置分析便成為極重要之課題。以下將分類敘述。

Assur 群中之五連桿組不僅為多連桿組之基礎，亦為平行操縱器之基本架構。其型態為用三根雙接頭桿以連接兩個三接頭桿。當接頭皆為旋轉運動對時，其位置分析可由幾何關係式為起始，推導出六次方程式 [Gosselin, C.M., Sefrioui, J. and Richard, M. J., 1992; Mitsi, S., 1999]；亦即五連桿組中之一桿固定時或平行操縱器之三輸入桿指定時，該連桿組最多可有六種不同形態。此外接頭亦可為稜柱運動對 [Gosselin, C.M. and Merlet, J.P., 1994; Kong, X. and Gosselin, C.M., 2001; Alici, G., 2002; Mitsi, S., 2003]。而作位置分析時，亦可轉換為最佳設計之數學型

態，再以 Genetic Algorithm(基因演算法)之方法得解。〔Boudreau, R. and Turkkan, N., 1996〕。

繼 Assur 群五連桿組後為七連桿組。其型態有三種，若以迴路方程式配合 Sylvester 之消去法，各型態最多可分別推得十四組解、十六組解及十八組解〔Innocenti, C., 1997; Innocenti, C., 1994; Innocenti, C., 1995〕。實數解亦可以掃描方式配合數值分析以求得〔Mlynarski, T., 1996; Shen, H.P., Ting K.L., and Yang T.L., 2000〕。若將七連桿組加以演變應用，可因輸入桿之數目，而得到八連桿組、九連桿組以及十連桿組〔Dhingra, A.K., Almadi, A.N., and Kohli, D., 2000a & 2000b〕。對於 Assur 群九連桿組，其中之一型態可推得 48 組解〔Han, L., Liao, Q., and Liang C. 2000〕。此外，將多連桿組視為多個獨立群組之結合〔Bawab, S. and Kinzel, G. L., 1995〕、將迴路方程式與 Grobner bases 搭配〔Dhingra, A.K., Almadi, A.N., and Kohli, D., 2001〕、使用複數之共軛性質以配合 Sylvester 消去法〔Wampler, C.W., 1999〕、或以三角函數所組成之線性方程配合 Dixon resultant method〔Nielsen, J. and Roth, B., 1999〕等，也可對多連桿組作位置分析。

然而上述之研究成果，無論使用何種方法作位置分析，皆有以下三個主要缺點。其一為實數解之個數，無法由各方程式之最高次數，套用 Bezout number [Mcleod M. and Baart, L., 1998; Orzech G. and Orzech M., 1981]，直接加以乘積而得。其主要之關鍵點為耦桿點曲線方程式多含有圓點之特性。第二個缺點為使用迴路方程式，易將各連桿組之位置分析視為分別獨立之問題，以致解題時皆須從頭開始；未能有效運用數個簡易群組可構成較複雜之多連桿組之可組合特性。第三個缺點為方程式中含三角函數，則更有礙於實數解之個數的計算。本研究之方法則可針對以上三個缺點加以改進。

### 三、研究方法及結果

#### (一)平面 Assur 五連桿

該五連桿如圖一所示，可於 C 點處拆解為一個四連桿組  $A_0ABB_0$  及一根接地雙接頭桿  $CC_0$  以作分析。接地雙接頭桿若為旋轉運動

對，則 C 點軌跡為一圓；若為稜柱運動對，則為一直線。四連桿組之耦桿點曲線型態亦因接頭而異。若所有接頭皆為旋轉運動對，則耦桿點曲線方程式如一般熟知為三重圓點六次曲線，且可表示為

$$(x^2 + y^2)^3 + G_1(x^2 + y^2)^2 + G_2(x^2 + y^2) + G_3 = 0 \quad (1)$$

其中  $G_i$  表示次數為  $i$  之多項式，亦即  $G_i$  代表

$$G_i = g_{ii0}x^i + g_{iil}x^{i-1}y + \dots + g_{iii}y^i + g_{i(i-1)0}x^{i-1} + \dots + g_{i(i-1)(i-1)}y^{i-1} + \dots + g_{i00} \quad (2)$$

如式(1)方程式之次數為 6 而圓點數為 3，於本文中將以 [6, 3] 表示式(1)之特徵。至於含稜柱運動對之四連桿組，其耦桿點曲線之方程式特徵亦列於表一。如 RRRP 或 RPRP，其曲線方程式之型態為

$$G_2(x^2 + y^2) + G_3 = 0 \quad (3)$$

其次數為 4 而圓點為 1，因此以 [4, 1] 表示。

將  $A_0ABB_0$  上之耦桿點 C 及  $CC_0$  之 C 點所演生之兩曲線相交並求解，可完成 C 點為旋轉對之 Assur 五連桿組位置分析。現若以圖一為例，兩曲線之特徵分別為 [6, 3] 及 [2, 1]。依 Bezout number [14]，應有 12 個解；但兩者相交於圓點 I(1, i, 0) 及 J(1, -i, 0) 共 6 次。因此兩曲線於實數平面上，最多僅有 6 個解。此例為表二之編號為(1)的說明，類似說明亦適於表二之其他 11 種情況。

對於 C 點為稜柱對，另發展出兩種耦桿線曲線。如圖二示，耦桿上之直線 DE，以該直線上最接近原點之點 F 的座標表示。另一方法為設若直線 DE 之方程為  $\ell x + my = 1$ ，則可用  $(\ell, m)$  以表示此直線。基於以上兩種方式，可進而推導耦桿線曲線。如圖二之連桿組，可推得其方程式為

$$(x^2 + y^2)^4 + G_2(x^2 + y^2)^3 + G_3(x^2 + y^2)^2 + G_{42}(x^2 + y^2) + G_{44} = 0 \quad (4)$$

該方程式之特徵為 [8, 3]。若以另種表示法，可推得之方程式為

$$(\ell^2 + m^2)^3 + G_2(\ell^2 + m^2)^2 + G_4(\ell^2 + m^2) + G_{42} = 0 \quad (5)$$

其特徵為 [6, 1]。

至於雙接頭桿  $CC_0$  之分析，則可視為恆經

過點  $C_0$  之直線。設若點  $C_0$  座標為  $(a, b)$ ，則耦桿線方程式可為

$$(x^2 + y^2) - ax - by = 0 \quad (6)$$

或

$$a\ell + bm + 1 = 0 \quad (7)$$

現若將式(5)與式(7)聯立求解，可得 6 組解。至於式(4)與式(6)，可得 16 組解，其中於圓點解之個數為  $2 \cdot 3 \cdot 1 = 6$ 。此外式(4)與式(6)之曲線，分別經過原點 4 次及 1 次，因而兩者交於原點之解有 4 個。最後可得有效解之數目亦為 6 ( $16 - 6 - 4 = 6$ )。上述討論針對表三中之編號(13)，表三中其餘五種則可依此類推。

表四為五連桿組之位置分析的總結。若以連桿組中含兩個稜柱對為例說明，當稜柱對位於不同之三接頭桿，則可採編號(9)、(14)或(5)之拆解方式及解法，最多可得 6 組解。當兩稜柱對位於同個三接頭桿，則依編號(8)、(4)、(15)或(6)之拆解方式及解法，最多可得 4 組解。

## (二) 平面 Assur 七連桿

如圖三所示，該等七連桿組共三種。對於圖三(a)所示者，可將其於 E 點處拆解成兩組四連桿組  $A_0ABB_0$  及  $C_0CDD_0$ 。因此 E 點需位於兩組四連桿組所演生之耦桿點曲線的交點上。若所有接頭皆為旋轉對，因兩耦桿點曲線方程式之特徵皆為  $[6, 3]$ ，所以 E 點之解最多有 18 組解 ( $6 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ )。此方法亦適於有稜柱對存在時。例如  $A_0ABB_0$  為 RRRP 且  $C_0CDD_0$  為 RPPR，則方程式之特徵分別為  $[4, 1]$  及  $[4, 2]$ ，因此其解之數目最多為 12 組解 ( $4 \cdot 4 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ )。若 E 點為稜柱對，則可採用如式(4)及式(5)之耦桿線曲線方程式，加以聯立求解。因此圖三(a)七連桿組之位置分析，僅需利用四連桿組之耦桿點曲線或耦桿線曲線方程式。

如圖三(b)所示之七連桿組，可於 F 點處將其拆解，而得到六連桿組及接地雙接頭桿  $C_0F$ 。該六連桿組為 Watt-I 型且另示於圖四(a)。雖然如點 D 所演生之曲線曾被推導，但若欲執行七連桿組之位置分析，所需者為點 F 所演生之曲線。以下便對推導過程加以略述。

分析時將座標原點設於點  $B_0$ ，且  $A_0$  點位於 X 軸上。雙接頭桿  $A_0A$  及  $CD$  分別為桿 2 及桿 5。 $B_0BE$  為桿 4、 $ABC$  為桿 3 及  $\triangle DEF$

為桿 6。角度  $\theta_2$ 、 $\theta_3$ 、 $\theta_4$ 、 $\theta_5$  及  $\theta_6$  等五個變數分別代表前述各桿與正 X 軸之夾角。對於迴路  $A_0ACBB_0A_0$ ，可寫出之複數方程式為

$$ae^{i\theta_2} + m_3e^{i\theta_3} = f + be^{i(\theta_4+\beta_4)} + n_3e^{i(\theta_3+\beta_3)} \quad (7)$$

分析之標的點 F 之位置則以  $R = x + iy$  表示。對於路徑  $B_0EF$  則可得

$$R = m_4e^{i\theta_4} + m_6e^{i\theta_6} \quad (8)$$

另一方程式則考慮迴路  $B_0BCDF$ ，該迴路可寫成

$$be^{i(\theta_4+\beta_4)} + n_3e^{i(\theta_3+\beta_3)} + de^{i\theta_5} + n_6e^{i(\theta_6-\beta_6)} = R \quad (9)$$

將式(7)與其共軛之方程式相乘，可將變數  $\theta_2$  消去，且變成

$$\left( A + Be^{-i\theta_4} \right) e^{i\theta_3} + \left( \bar{A} + \bar{B}e^{i\theta_4} \right) e^{-i\theta_3} + Ce^{i\theta_4} + \bar{C}e^{-i\theta_4} + D = 0 \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= f(n_3e^{i\beta_3} - m_3) \\ B &= be^{-i\beta_4}(n_3e^{i\beta_3} - m_3) \\ C &= fbe^{i\beta_4} \\ D &= f^2 - a^2 + b^2 + m_3^2 + n_3^2 - 2m_3n_3\cos\beta_3 \end{aligned} \quad (11)$$

相同的，將式(8)與其共軛方程相乘後，可得

$$R\bar{R} = m_4\bar{R}e^{i\theta_4} + m_4Re^{-i\theta_4} - (m_4^2 - m_6^2) \quad (12)$$

式中之  $\bar{R}$  為變數 R 之共軛複數。

第(9)式中含變數  $\theta_3$ 、 $\theta_4$ 、 $\theta_5$  及  $\theta_6$ 。其中  $\theta_6$  可用式(8)代入。 $\theta_5$  可利用與其共軛方程式相乘以消去。藉此，可得僅含變數  $\theta_3$  及  $\theta_4$  之方程。若再將  $R\bar{R}$  以式(12)代入，經推導整理後可得

$$\left( \bar{E}R + Fe^{-i\theta_4} \right) e^{i\theta_3} + \left( \bar{E}R + \bar{F}e^{i\theta_4} \right) e^{-i\theta_3} + GRe^{-i\theta_4} + \bar{G}Re^{i\theta_4} + H = 0 \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} E &= \frac{n_3e^{i\beta_3}}{m_6}(n_6e^{i\beta_6} - m_6) \\ F &= \frac{n_3e^{i\beta_3}}{m_6}(bm_6e^{-i\beta_4} - m_4n_6e^{i\beta_6}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \frac{1}{m_6} (bn_6 e^{-i(\beta_6 + \beta_4)} - bm_6 e^{-i\beta_4} \\
&\quad + m_4 m_6 - m_4 n_6 e^{-i\beta_6}) \\
H &= b^2 - d^2 - m_4^2 + n_3^2 + m_6^2 + n_6^2 \\
&\quad + \frac{2}{m_6} (m_4^2 n_6 \cos \beta_6 - bm_4 n_6 \cos(\beta_4 + \beta_6)) \\
&\quad - 2m_6 n_6 \cos \beta_6
\end{aligned} \tag{14}$$

耦桿點 F 所演生之曲線方程式，主要可藉式(10)、(12)及(13)加以推導。該三式中共含  $x$ 、 $y$ 、 $\theta_3$  及  $\theta_4$  四個變數。由於式(10)及(13)僅含  $\theta_3$  及  $\theta_4$  兩變數，可由此二式將  $\theta_3$  消去。因此可得

$$\sum_{j=0}^6 T_j e^{j(i\theta_4)} = 0 \tag{15}$$

且

$$\begin{aligned}
T_6 &= K_1 \bar{K}_4 \\
T_5 &= K_1 \bar{K}_3 + K_2 \bar{K}_4 + K_5^2 \\
T_4 &= K_1 \bar{K}_2 + K_2 \bar{K}_3 + K_3 \bar{K}_4 + 2K_5 K_6 \\
T_3 &= K_1 \bar{K}_1 + K_2 \bar{K}_2 + K_3 \bar{K}_3 \\
&\quad + K_4 \bar{K}_4 - 2K_5 \bar{K}_5 + K_6^2 \\
T_2 &= \bar{T}_4 \quad T_1 = \bar{T}_5 \quad T_0 = \bar{T}_6 \\
K_1 &= -\bar{BGR} + \bar{CF} \\
K_2 &= \bar{CER} - \bar{AGR} + (\bar{DF} - \bar{BH}) \\
K_3 &= (\bar{DE} - \bar{BG})R + \bar{CF} - \bar{AH} \\
K_4 &= (\bar{CE} - \bar{AG})R \\
K_5 &= \bar{AF} - \bar{BER} \\
K_6 &= \bar{BF} + \bar{AER} - \bar{BF} - \bar{AER}
\end{aligned} \tag{16}$$

此外，式(12)可改寫為

$$\bar{R}e^{2i\theta_4} + Le^{i\theta_4} + R = 0 \tag{17}$$

而

$$L = -(\bar{R}\bar{R} + m_4^2 - m_6^2)/m_4 \tag{18}$$

現若將式(17)乘以  $\left(\frac{T_6 e^{4i\theta_4}}{\bar{R}} + \frac{T_0}{R}\right)$  且與式(15)

相減，可得

$$\sum_{j=1}^5 S_j e^{j(i\theta_4)} = 0 \tag{19}$$

以及五項  $S_j$  的型態分別為

$$S_5 = a_1 \bar{R}\bar{R}^2 + a_2 \bar{R}\bar{R} + a_3 \bar{R}^2 + a_4 \bar{R} + a_5$$

$$S_4 = b_1 \bar{R}\bar{R} + b_2 \bar{R}^2 + b_3 \bar{R} + b_4 \bar{R} + b_5$$

$$\begin{aligned}
S_3 &= (c_1 \bar{R}^2 + \bar{c}_1 \bar{R}^2) + c_2 \bar{R}\bar{R} \\
&\quad + (c_3 \bar{R} + \bar{c}_3 \bar{R}) + c_4
\end{aligned} \tag{20}$$

並且  $S_1 = \bar{S}_5$  以及  $S_2 = \bar{S}_4$ 。而  $S_3$  項則僅含實數。

對於式(17)及(19)，可再運用 Sylvester 消去法以去除變數  $\theta_4$ 。藉此可得

$$\begin{vmatrix}
\bar{R} & L & R & 0 & 0 & 0 \\
0 & \bar{R} & L & R & 0 & 0 \\
0 & 0 & \bar{R} & L & R & 0 \\
0 & 0 & 0 & \bar{R} & L & R \\
S_5 & S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & 0 \\
0 & S_5 & S_4 & S_3 & S_2 & S_1
\end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

此方程式僅含變數  $x$  及  $y$ ，且為耦桿點 F 所演生之曲線方程式。若將其展開可得

$$\begin{aligned}
&S_5 \bar{S}_5 L^4 + (-S_4 \bar{S}_5 \bar{R} - S_4 S_5 R) L^3 \\
&+ (S_5 R^2 + \bar{S}_5 \bar{R}^2) S_3 L^2 + (S_4 \bar{S}_4 - 4S_5 \bar{S}_5) \bar{R} \bar{R} L^2 \\
&+ (-R^3 S_4 S_5 - \bar{R}^3 \bar{S}_4 \bar{S}_5) L \\
&+ (3(S_4 \bar{S}_5 \bar{R} + \bar{S}_4 S_5 R) - S_3 (\bar{S}_4 \bar{R} + S_4 R)) \bar{R} \bar{R} L \\
&+ \bar{S}_5^2 \bar{R}^4 + S_5^2 R^4 \\
&+ (S_4^2 R^2 + \bar{S}_4^2 \bar{R}^2 - 2S_3 \bar{S}_5 \bar{R}^2 - 2S_3 S_5 R^2) \bar{R} \bar{R} \\
&+ (S_3^2 - 2S_4 \bar{S}_4 + 2S_5 \bar{S}_5) R^2 \bar{R}^2 = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

雖然推導過程採用複變數，但(22)式中僅含實數項。如果再對其詳加分析整理，其型態可表示為

$$\begin{aligned}
&G_0 (\bar{R}\bar{R})^7 + G_1 (\bar{R}\bar{R})^6 + G_2 (\bar{R}\bar{R})^5 \\
&+ G_3 (\bar{R}\bar{R})^4 + G_4 (\bar{R}\bar{R})^3 + G_4 (\bar{R}\bar{R})^2 \\
&+ G_4 (\bar{R}\bar{R}) + G_4 = 0
\end{aligned} \tag{23}$$

因此該方程式之次數為 14 且圓點數為 7。

上述之推導雖然針對連桿組之所有接頭皆為旋轉對，但若有稜柱對時，亦有其適用性。當  $A_0$  為稜柱對時，耦桿點 F 之曲線方程式的型態為

$$G_2(\overline{RR})^5 + G_3(\overline{RR})^4 + \dots + G_7 = 0 \quad (24)$$

其特徵可以[12, 5]表示。當  $B_0$  為稜柱對時，可得

$$G_4(\overline{RR})^3 + G_5(\overline{RR})^2 + G_6(\overline{RR}) + G_7 = 0 \quad (25)$$

特徵為 [10, 3]。若  $A_0$  與  $B_0$  皆為稜柱對，則方程式的型態為

$$G_4(\overline{RR}) + G_5 = 0 \quad (26)$$

特徵為[6, 1]。

以上推得之四個耦桿曲線方程可與兩種不同之雙接頭桿組合，共可得如圖三(b)的連桿組共八種。作位置解析時，數學上僅需將推得之方程與圓或直線聯立求解。並且實數解個數的最大值可被迅速的求得，其結果列述於表五之前段。

至於圖三(c)之七連桿，若於 F 點處拆解，可得如圖四(b)之 Stephenson-I 六連桿組及雙接頭桿。該 Stephenson-I 六連桿組之耦桿點 F 所演生之曲線方程式亦於本計劃中詳細推導，基於篇幅，不予詳述推導過程。對於  $A_0$  與  $B_0$  為旋轉對或稜柱對時，其曲線方程式之特徵列於表七之前段。若對圖三(c)之七連桿作位置解析時，則可如前述將六連桿組與雙頭桿之兩耦桿曲線方程聯立求解。實數解個數的最大值亦列述於表七之後段。

因此所有三種平面 Assur 七連桿之位置分析，皆可將連桿組加以拆解，再由兩曲線之交集以求解。此外拆解方式並不限於如上所述；如圖三(b)之七連桿，亦可拆解為 Stephenson-II 與雙接頭桿。

本計劃之方法，至此顯示已可完成所有 Assur 五連桿與七連桿的位置分析。亦代表可應用於所有具一個自由度的六連桿與八連桿的位置分析。換言之，所有常用的平面連桿組的位置解析，皆可採用本方法。

### (三)平面 Assur 九連桿或 11 連桿

將六連桿組與四連桿組加以組合後，可得 Assur 九連桿。如圖五乃將 Watt-I 六連桿與四

連桿組  $G_0GHH_0$  組合而成。執行位置解析時，僅需將六連桿組與四連桿組之耦桿曲線方程聯立求解即可。其實數解或構形個數的最大值亦列述於表五之中段。

例題：本例題有關如圖五之九連桿組的分析。四接頭桿  $A_0B_0G_0H_0$  之座標為  $A_0 : (-35, 0)$ 、 $B_0 : (0, 0)$ 、 $G_0 = (2, 45)$  及  $H_0 = (-33, 5)$ 。右側之四連桿組的桿長及尺寸為  $|G_0G| = 55$ 、 $|H_0H| = 50$ 、 $|FG| = 63$ 、 $|FH| = 55$  及  $\angle GFH = 115^\circ$ 。左側之 Watt-I 六連桿組的桿長及尺寸為  $|A_0A| = a = 15$ 、 $m_3 = 26$ 、 $n_3 = 12.5$ 、 $|AB| = 31.5$ 、 $|B_0B| = b = 20$ 、 $m_4 = 32$ 、 $|BE| = 20$ 、 $d = 31$ 、 $m_6 = n_6 = 25$ 、及  $|DE| = 30$ 。試求該九連桿組之所有構形。

解：本問題可依下述四步驟完成。

步驟一為求四連桿組中耦桿點 F 之曲線方程。其次數為 6 而圓點數為 3。

步驟二為求六連桿組中耦桿點 F 之曲線方程。基於連桿組之尺寸，由式(11)及(14)求 A, B, .. G 及 H 之值。而後依循式(15)至(22)的步驟，可得式(23)之次數為 14 而圓點數為 7 的曲線方程式。

步驟三為將前二步驟所得之方程聯立求解，該等解即為點 F 之座標。求得之座標列述於表六。雖然最多應有 42 組解，該例僅有 22 個實數解。

步驟四為依據各組點 F 之座標，可簡易得建構出對應的所有構形。如對應於  $F(17.61580, 54.02800)$  之解，所得之構形為圖六之九連桿組。

圖七則繪出步驟一及二所求得之兩條耦桿點曲線以供參考。兩曲線之交點或點 F 之所在則以「\*」號表示。

圖八所示亦為 Assur 九連桿之其中一種。該連桿組可被拆解為 Stephenson-I 六連桿與四連桿。其分析方式僅需依例題所示即可。不同處當然為需使用 Stephenson-I 六連桿之耦桿點曲線方程。對於不同之接頭組合，其

可能構形的最大數目亦列述於表八。

當然將兩個六連桿組結合，則可得 Assur11 連桿組。表五之後段所列述者，乃將兩組 Watt-I 六連桿結合時之最大可能構形數目。

#### (四) 耦桿曲線方程之特徵

本研究另針對如圖九之一耦桿 CDE 之曲線特徵作探討。若點 C 及點 D 所演生之曲線可視為獨立，且特徵分別為  $[O_C, C_C]$  及  $[O_D, C_D]$ ，則點 E 所演生之曲線的特徵可迅速推導而為  $O_E = 2O_D O_C - 2C_D C_C$  及  $C_E = C_C O_D + O_C C_D - C_C C_D$ 。

以圖十之十連桿為例說明，該連桿組可視為由 Watt-I 六連桿、一個四連桿  $G_0GHH_0$  及一個耦桿 FIJ 所組成。點 F 之曲線特徵如前所推導為  $[10, 3]$ 。點 J 之曲線特徵為  $[4, 1]$ 。利用前述之結果，可得點 J 之曲線特徵為  $[74, 19]$ 。

#### 四、討論

對於平面連桿組之分析，本研究計劃完成 Assur 五連桿組及三種 Assur 七連桿組之位置分析。換言之，本研究之結果可解決所有自由度為一的六連桿及八連桿的位置解析。另外，相同方法亦可適用於部分 Assur 九連桿組及 Assur 十一連桿組。

本計劃亦完成 Watt-I 及 Stephenson-I 之耦桿點曲線方程式的推導。除了推導目標針對耦桿點外，得到的方程式，其次數及圓點數皆可明顯判讀。因此該結果能適用於連桿組之位置分析及相關應用。此外，推導之過程及結果，亦考慮到程式撰寫時之需求。

至於 Assur 七連桿組之結果，雖然當部分接頭為稜柱對時，未能加以分析。但由於其可能之狀況頗多。使用者可針對個別需求，沿用本計劃所述之六連桿耦桿曲線方程的推導方式，加以循序推導。

此外，本計劃之執行成果。目前已發表兩篇 SCI 收錄的期刊論文，兩篇校內期刊論文，以及一篇國內研討會的投稿。

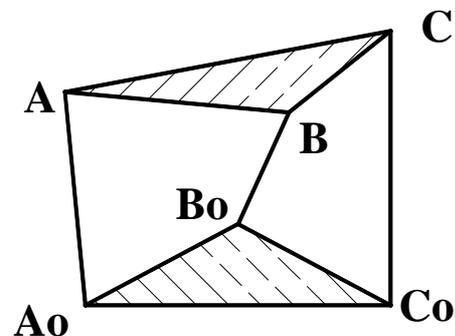
#### 五、參考文獻

1. Alici, G., 2002, "An inverse position analysis of five-bar parallel manipulators,"

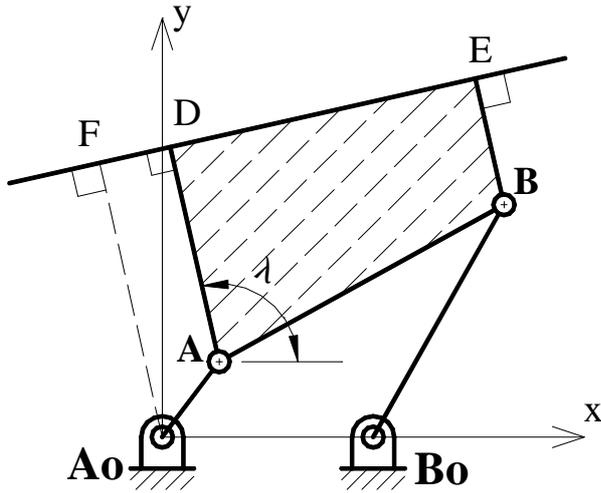
- Robotica, Vol. 20, pp.195-201.
2. Bawab, S. and Kinzel, G. L., 1995, "A hybrid approach to solving the position equations for planar mechanisms," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 117, pp. 527-632.
  3. Boudreau, R. and Turkkan, N., 1996, "Solving the forward kinematics of a parallel manipulators with a genetic algorithm," Journal of Robotic Systems, Vol. 13, pp.111-125.
  4. Chu, J. and Cao, W., 1998, "Systemics of Assur groups with multi joints," Mechanism and Machine Theory, Vol. 33, pp.1127-1133.
  5. Chung, W. Y., 2005a, "The Position Analysis of Assur Kinematic Chain with Five Links," Mechanism and Machine Theory, Vol. 40, No. 9, pp. 1015-1029. (SCI, EI).
  6. Chung, W. Y., 2005b, "The Characteristics of a Coupler Curve," Mechanism and Machine Theory, Vol. 40, No. 10, pp. 1099-1106. (SCI, EI).
  7. 鐘文遠, 2005c, "Watt-I 型六連桿之耦桿點曲線方程式," 華岡工程學報, Vol. 19, pp. 141-148.
  8. 鐘文遠, 2005d, "平面八連桿之位置分析," 華岡工程學報, Vol. 19, pp. 149-154.
  9. Chung, W. Y, 2005e, "The Coupler Curves of Stephenson-I six-bar and the Applications," 投稿至第八屆全國機構與機器設計學術研討會
  10. Dhingra, A.K., Almadi, A.N., and Kohli, D., 2000, "Colsed-form displacement analysis of 8, 9 and 10-link mechanisms Part I: 8-link 1- DOF mechanisms," Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, pp.821-850.
  11. Dhingra, A.K., Almadi, A.N., and Kohli, D., 2000, "Colsed-form displacement analysis of 8, 9 and 10-link mechanisms Part II: 9-link 2-DOF and 10-link 3-DOF mechanisms," Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, pp.851-869.
  12. Dhingra, A.K., Almadi, A.N., and Kohli, D., 2001, "Colsed-form displacement and coupler curve analysis of planar multi-loop mechanisms using Grobner bases,"

- Mechanism and Machine Theory, Vol. 36, pp.273-298.
13. Galletti, C.U., 1986, "A note on modular approaches to planar linkage kinematic analysis," Mechanism and Machine Theory, Vol. 21, pp.385-391.
  14. Gosselin, C.M. and Merlet, J.P., 1994, "The direct kinematics of planar parallel manipulators: special architecture and number of solutions," Mechanism and Machine Theory, Vol. 27, pp.107-109.
  15. Gosselin, C.M., Sefrioui, J. and Richard, M. J., 1992, "Solutions polynomiales au probleme de la cinematique directe des manipulateurs paralleles plans a trois degres de liberte," Mechanism and Machine Theory, Vol. 27, pp.107-109.
  16. Han, L., Liao, Q., and Liang C. 2000, "Closed-form displacement analysis for a 9-link Barranov truss or a eight-link Assur group," Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, pp.379-390.
  17. Hunt, K. H., 1978, Kinematic Geometry of Mechanisms, Oxford, University Press.
  18. Innocenti, C., 1994, "Analytical form position analysis of the 7-link Assur kinematic chain with four serially-connected ternary links," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 116, pp. 622-628.
  19. Innocenti, C., 1995, "Polynomial solution to the position analysis of the 7-link Assur kinematic chain with one quaternary link," Mechanism and Machine Theory, Vol. 30, pp.1295-1303.
  20. Innocenti, C., 1997, "Position analysis in analytical form of the 7-link Assur kinematic chain featuring one ternary link connected to ternary links only," Mechanism and Machine Theory, Vol. 32, pp.501-509.
  21. Kong, X. and Gosselin, C.M., 2001, "Forward displacement analysis of third-class analytic 3-RPR planar parallel manipulators," Mechanism and Machine Theory, Vol. 36, pp.1009-1018.
  22. Mcleod M. and Baart, L., 1998, Geometry and interpolation of curves and surfaces, Cambridge University Press.
  23. Mitsi, S., 1999, "Position analysis in polynomial form of planar mechanisms with a closed chain of the Assur group of class 4," Mechanism and Machine Theory, Vol. 34, pp.1195-1209.
  24. Mitsi, S., Bouzakis, K.-D., Mansour, G. and Popescu, I., 2003, "Position analysis in polynomial form of planar mechanisms with Assur groups of class 3 including revolute and prismatic joints," Mechanism and Machine Theory, Vol. 38, pp. 1325-1344.
  25. Mlynarski, T., 1996, "Position analysis of planar linkages using the method of modification of kinematic units," Mechanism and Machine Theory, Vol. 31, pp.831-838.
  26. Nielsen, J. and Roth, B., 1999, "Solving the input/output problem for planar mechanisms," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 121, pp. 206-211.
  27. Orzech G. and Orzech M., 1981, Plane Algebraic Curves.
  28. Shen, H.P., Ting K.L., and Yang T.L., 2000, "Configuration analysis of complex multiloop linkages and manipulators," Mechanism and Machine Theory, Vol. 35, pp.353-362.
  29. Tsui, L.W., 1999, Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators, John Wiley & Sons, Inc.
  30. Wampler, C.W., 1999, "Solving the kinematics of planar mechanisms," ASME Journal of Mechanical Design, Vol. 121, pp. 387-391.
  31. 蔣君宏, 1997, 高等機動學, McGraw-Hill Inc.

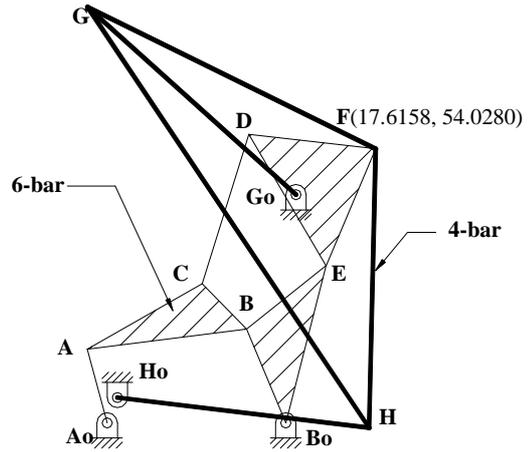
圖表彙整



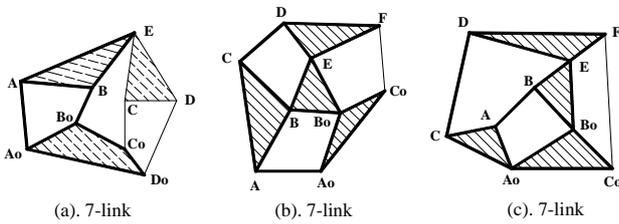
圖一: Assur 五連桿組



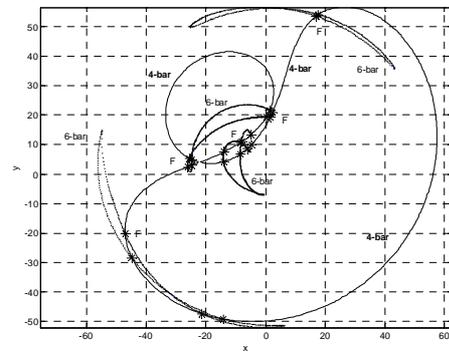
圖二：耦桿線曲線之說明



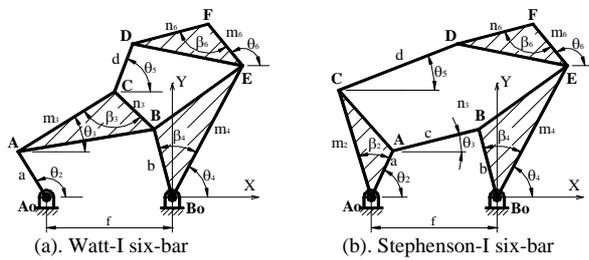
圖六：九連桿組例題之一組解



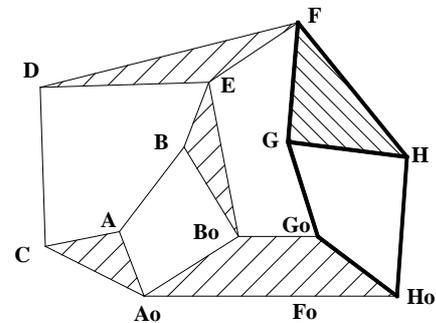
圖三：三種 Assur 七連桿組



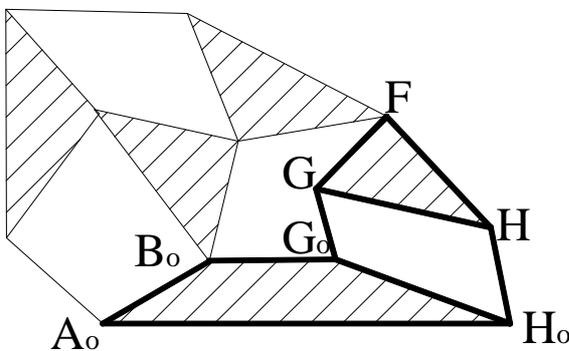
圖七：兩耦桿組曲線及 22 組解



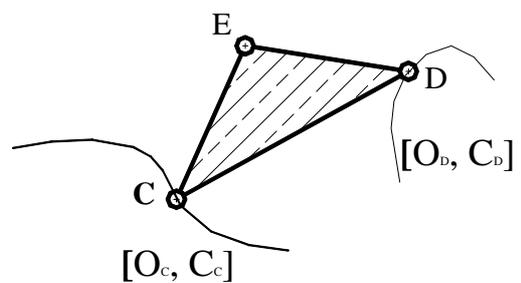
圖四：兩種六連桿組



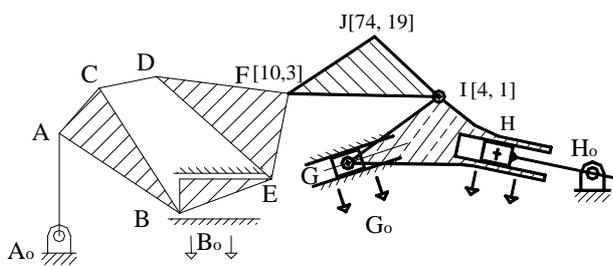
圖八：Assur 九連桿組之一種



圖五：Assur 九連桿組之一種



圖九：三接頭桿之曲線特徵



圖十：耦桿點曲線特徵分析之舉例

表一. 10種四連桿組及其特徵

1. RRRR [6, 3]		2. RRRP [4, 1]	
3. RRPR [6, 3]		4. RPPR [4, 2]	
5. PRPR [4, 1]		6. PRRP [2, 0]	
7. RRPP 	8. RPPP 	9. PRPP 	10. PPPP 

表二. Assur 五連桿之解的數目-I

四連桿	特徵	CC <sub>0</sub> 之曲線與編號			
		圓	編號	直線	編號
RRRR	[6, 3]	6	(1)	6	(7)
RRRP	[4, 1]	6	(2)	4	(8)
RRPR	[6, 3]	6	(3)	6	(9)
PRRP	[2, 0]	4	(4)	2	(10)
PRPR	[4, 1]	6	(5)	4	(11)
RPPR	[4, 2]	4	(6)	4	(12)

表三. Assur 五連桿之解的數目-II

四連桿	編號	解的數目	耦桿線曲線特徵		
			特徵 (x, y)	原點 (x, y)	次數 (l, m)
RRRR	(13)	6	[8, 3]	4	6
RRRP	(14)	6	[8, 3]	4	6
RRPR	(15)	4	[8, 4]	4	4
PRRP	(16)	4	[6, 2]	4	4
PRPR	(17)	4	[4, 1]	2	4
RPPR	(18)	2	[4, 2]	2	2

表四. Assur 五連桿之位置分析

五連桿	稜柱運動對 (Type)	解的數目	拆解點	編號
6R	None (RR-RR-RR)	6	all	1
5R1P	C <sub>0</sub> (RR-RR-PR) (RR-RR-RP)	6	C	7
			A or B	2
			C <sub>0</sub>	13
			A <sub>0</sub> or B <sub>0</sub>	3
4R2P	C <sub>0</sub> and B (RR-RP-PR) (RR-PR-RP)	6	C or B <sub>0</sub>	9
			B or C <sub>0</sub>	14
			A or A <sub>0</sub>	5
	C <sub>0</sub> and B <sub>0</sub> (RR-PR-PR) (RR-RP-RP)	4	C or B	8
			A	4
3R3P	C <sub>0</sub> , B <sub>0</sub> , and A (RP-PR-PR) (PR-RP-RP)	4	C <sub>0</sub> or B <sub>0</sub>	15
			A <sub>0</sub>	6
			B or C	11
	C <sub>0</sub> , B <sub>0</sub> , and A <sub>0</sub> (PR-PR-PR) (RP-RP-RP)	2	A	16
			B <sub>0</sub> or C <sub>0</sub>	17
			A <sub>0</sub>	12
C, B, or A	10	C, B, or A	10	
		C <sub>0</sub> , B <sub>0</sub> , or A <sub>0</sub>	18	

表五: 含 Watt-I 六連桿之 Assur 7 連桿、9 連桿及 11 連桿的最大構形數目

Watt-IA <sub>0</sub> 接頭		旋轉		稜柱	
Watt-IB <sub>0</sub> 接頭		旋轉	稜柱	旋轉	稜柱
7-link	F <sub>0</sub> :旋轉	14	14	14	10
	F <sub>0</sub> :稜柱	14	10	12	6
9-link	RRRR,RRPR	42	42	42	30
	RRRP,PRPR	42	34	38	22
	RPPR	28	28	28	20
	PRRP	28	20	24	12
11-link	Watt-I [14, 7]	98	98	98	70
	Watt-I [10, 3]	98	82	90	54
	Watt-I [12, 5]	98	90	94	62
	Watt-I [6, 1]	70	54	62	34

表六: 例題一之 F 點座標

No.	Fx	Fy	No.	Fx	Fy
1	17.615	54.028	12	-8.405	6.816
2	16.882	53.490	13	-6.112	8.606
3	-14.119	-49.129	14	-4.774	9.876
4	-21.283	-47.340	15	-7.943	10.981
5	-44.745	-28.373	16	-8.342	10.708
6	-46.930	-20.274	17	-4.959	13.283
7	2.355	20.820	18	-13.849	7.533
8	1.399	21.584	19	-24.560	4.844
9	1.658	19.318	20	-25.422	5.279
10	0.1928	19.254	21	-24.544	3.015
11	-13.932	4.166	22	-25.994	2.455

表七: 含 Stephenson-I 六連桿之耦桿曲線特徵及其相關 7 連桿的最大構形數目

接頭 B <sub>0</sub>	A <sub>0</sub> :旋轉		A <sub>0</sub> :稜柱	
	旋轉	稜柱	旋轉	稜柱
次數	16	12	14	8
圓點	8	4	6	2
Assur 7 連桿				
F <sub>0</sub> :旋轉	16	16	16	12
F <sub>0</sub> :稜柱	16	12	14	8

表八: 含 Stephenson-I 六連桿之九連桿

接頭 B <sub>0</sub>	A <sub>0</sub> :旋轉		A <sub>0</sub> :稜柱	
	旋轉	稜柱	旋轉	稜柱
RRRR&RRPR: 次數=6 圓點=3				
數目	48	48	48	36
RRRP&PRPR: 次數=4 圓點=1				
數目	48	40	44	28
RPPR: 次數=4 圓點=2				
數目	32	32	32	24
PRRP: 次數=2 圓點=0				
數目	32	24	28	16