

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

粗糙表面之吸引及彈性接觸之數值分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC92-2212-E-034-002-

執行期間：92年08月01日至93年07月31日

執行單位：中國文化大學機械工程學系

計畫主持人：吳俊仲

計畫參與人員：張曉芬

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 93 年 9 月 14 日

(計畫名稱)

計畫類別： 個別型計畫 整合型計畫
計畫編號：NSC - 92 - 2212 - E034 - 002
執行期間： 92年 8月 1日至 93年 7月 31 日

計畫主持人：吳俊仲
共同主持人：
計畫參與人員：張曉芬

成果報告類型(依經費核定清單規定繳交)： 精簡報告 完整報告

本成果報告包括以下應繳交之附件：
赴國外出差或研習心得報告一份
赴大陸地區出差或研習心得報告一份
出席國際學術會議心得報告及發表之論文各一份
國際合作研究計畫國外研究報告書一份

處理方式：除產學合作研究計畫、提升產業技術及人才培育研究計畫、
列管計畫及下列情形者外，得立即公開查詢
 涉及專利或其他智慧財產權， 一年 二年後可公開查詢

執行單位：中國文化大學機械系

中 華 民 國 93 年 9 月 14 日

粗糙表面之吸引及彈性接觸之數值分析

Numerical Analysis on the Adhesive and Elastic Contact between Rough Surfaces

計劃編號：NSC 92-2212-E034-002

執行期限：92 年 8 月 1 日至 93 年 7 月 31 日

主持人：吳俊仲 中國文化大學 機械工程學系

中文摘要

本研究使用 FFT、inexact Newton method 與 Bi-CGSTAB、preconditioner、path following method 等方法，在直角座標系上求解粗糙表面的彈性吸引力，結果發現，有 bifurcation 的現象。

關鍵詞：粗糙表面、接觸力

Abstract

A numerical method for the adhesive contact between rough surfaces in rectangular coordinate is proposed. FFT, inexact Newton method and Bi-CGSTAB, preconditioner, path following method are employed to find the adhesive contact for rough surfaces in rectangular coordinate. The result shows that there is bifurcation.

Keywords: Rough surface, adhesive contact

1. Introduction

微奈米接觸的研究有兩個方法。第一種採用連續力學的方法，加入奈米級的吸引力分析，第二種使用分子動力學的理論。Miesbauer 等人[1]發現，5nm 以上的微奈米表面接觸，可以使用連續力學來作模擬；較小尺寸的接觸則必須使用分子動力學來分析。本研究係採用連續力學的方法來分析。

連續力學的吸引彈性力學分析，早期的學者在多以數學推導出球體接觸的解析解。在 1970 年代，Johnson 等人提出了 JKR

model [2]。Derjaguin 等人在 1975 年提出了 DMT model[3]。經過十餘年，在 1992 年，Maugis 使用 Dugdale model，找出整合兩種 model 的解析解[4]，但是解析解在數學上都作了某些方面的簡化，所以只是近似解。

在吸引彈性力學的數值解方面，在 1992 年，Attard 等人[5]使用 Lennard Jones Law，提出數值方法分析。1997 年 Greenwood [6]有進一步的研究。Feng[7]於 2000 年提出更詳盡且較佳數值解。大體來說，國際上在這方面的研究，有相當的成果，但是由於是計算球與平面之力，為簡化計算，都採用軸對稱的公式來計算。因此，這方面的數值分析方法無法推廣至其他形狀。

至於直角座標方面，至今僅有 Wu[8]提出相關的方法。粗糙表面的吸引接觸力學分析，必須用直角座標。本研究就是使用 Wu 的方法，研究粗糙表面的彈性吸引接觸力。

2. Adhesive Elastic Contact Problem

2.1 Displacement Due to Force

點作用力加於無限之半平面，位移如下式[9]：

$$u_z = \frac{1-\nu}{2\pi G} \frac{P}{r}$$

平面上所有的力，對 (x, y) 點所產生的位移如下式：

$$u_z(x, y) = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y') dx' dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}}$$

2.2 Displacement due to Adhesive Contact

在微奈米接觸時，需考慮原子之間的作用力。根據 Lennard-Jones Law，原子間的作用力如下式[5]：

$$p(h) = \frac{8\Delta\gamma}{3\varepsilon} \left[\left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^3 - \left(\frac{\varepsilon}{h}\right)^9 \right] \quad (1)$$

因此，在微奈米級球體與平面接近或接觸時，需滿足下式：

$$h = -\alpha + \varepsilon + h_0 + \frac{1}{E^*} \iint \frac{p(h)dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \quad (2)$$

其中，

h_0 表面的原始形態

α 平面與球最低點的距離，零點為 $h = \varepsilon$ 。

ε 原子間的距離

h 球體與平面中線之距離

$$E^* \text{ 楊氏係數, } \frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}$$

兩粗糙表面之接觸，可假設為一粗糙表面與一平面接觸。一般而言，我們假設粗糙表面的 auto-correlation function(ACF)為[10]

$$R(\tau) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{S}{b}\right)$$

對(1)與(2)式作無因次化，

$$H = \frac{h}{\varepsilon} - 1 \quad A = \frac{\alpha}{\varepsilon} \quad H_0 = \frac{h_0}{\varepsilon}$$

$$\mu = \left(\frac{b\Delta\gamma}{E^*\varepsilon^2}\right)^{2/3} \quad X = \frac{x}{b} \quad Y = \frac{y}{b}$$

$$S = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

則方程式(1)與(2)可寫成

$$\begin{cases} F(H) = H + A - H_0 \\ \quad + \frac{32\mu^{3/2}}{3\pi} \iint \frac{P(X',Y')dX'dY'}{\sqrt{(X-X')^2 + (Y-Y')^2}} \\ P(X',Y') = \left[\frac{1}{(H+1)^3} - \frac{1}{(H+1)^9} \right] \end{cases} \quad (3)$$

粗糙表面的 non-dimensional ACF 為

$$C(\tau) = S^2 \exp(-\sqrt{X^2 + Y^2})$$

另外，接觸力合力為 $W = \iint p(x,y)dxdy$ ，將

合力無因次化為 $P = \frac{p\mu\varepsilon}{\Delta\gamma}$ ，所以，合力可由

下式算出

$$W = \frac{\Delta\gamma R}{\mu} \iint P dX dY。$$

2.3 Rectangular Analysis

在直角標中，格點化後，假設每一方格中，力量均相同，則某點的位移可寫成

$$\begin{aligned} (\bar{u}_z)_l &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{k=1}^M \left\{ \iint_{\Omega} \frac{p(x',y')dx'dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right\} P_x \\ &= \sum_{k=1}^M C_{kl} P_k \end{aligned}$$

位移常數為[11]

$$\begin{aligned} C_{kl} &= \frac{1}{\pi E^*} \left\{ (x+a) \ln \left[\frac{(y+b) + \sqrt{(y+b)^2 + (x+a)^2}}{(y-b) + \sqrt{(y-b)^2 + (x+a)^2}} \right] \right. \\ &\quad + (y+b) \ln \left[\frac{(x+a) + \sqrt{(y+b)^2 + (x+a)^2}}{(x-a) + \sqrt{(y+b)^2 + (x-a)^2}} \right] \\ &\quad + (x-a) \ln \left[\frac{(y-b) + \sqrt{(y-b)^2 + (x-a)^2}}{(y+b) + \sqrt{(y+b)^2 + (x-a)^2}} \right] \\ &\quad \left. + (y-b) \ln \left[\frac{(x-a) + \sqrt{(y-b)^2 + (x-a)^2}}{(x+a) + \sqrt{(y-b)^2 + (x+a)^2}} \right] \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

所以方程式(3)可寫成

$$\begin{cases} F(H_i) = H_i + A - \frac{(X_i^2 + Y_j^2)}{2} \\ \quad + \frac{32\mu^{3/2}}{3\pi} \sum C_{ij} P_j \\ P_j = \left[\frac{1}{(H_j+1)^3} - \frac{1}{(H_j+1)^9} \right] \end{cases} \quad (5)$$

本研究就是用疊代法解方程式(5)。

3. Numerical Procedure

3.1 FFT and Convolution

前述式(5)中矩陣 $\sum C_{ij}$ 的太大，無法計

算其乘積 $\sum C_{ij} P_j$ 。舉例而言， 256×256 點

之平面， $\sum C_{ij}$ 有 $256^4 = 42,994,967,296$ 個

元素。但因為這是表面之接觸，Liu[12]發

現，可用 convolution 及 FFT 來解決。

假設 z 為 x 與 y 之 convolution，這可寫成下式

$$z_i = \sum_{j=1}^N x_{i-j+1} y_j$$

則其 FFT 滿足下式

$$Z_n = X_n Y_n$$

舉例而言，If $N = 4$

$$z_1 = x_1 y_1 + x_0 y_2 + x_{-1} y_3 + x_{-2} y_4$$

$$z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_0 y_3 + x_{-1} y_4$$

$$z_3 = x_3 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_3 + x_0 y_4$$

$$z_4 = x_4 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_3 + x_1 y_4$$

$$z_1 = x_1 y_1 + x_4 y_2 + x_3 y_3 + x_2 y_4$$

$$z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 + x_4 y_3 + x_3 y_4$$

$$z_3 = x_3 y_1 + x_2 y_2 + x_1 y_3 + x_4 y_4$$

$$z_4 = x_4 y_1 + x_3 y_2 + x_2 y_3 + x_1 y_4$$

則

$$Z_1 = X_1 Y_1 \quad Z_2 = X_2 Y_2 \quad Z_3 = X_3 Y_3$$

在接觸的問題中，

$$\begin{aligned} u_1 &= C_0 p_1 + C_1 p_2 + C_2 p_3 + C_3 p_4 \\ u_2 &= C_1 p_1 + C_0 p_2 + C_1 p_3 + C_2 p_4 \\ u_3 &= C_2 p_1 + C_1 p_2 + C_0 p_3 + C_1 p_4 \\ u_4 &= C_3 p_1 + C_2 p_2 + C_1 p_3 + C_0 p_4 \end{aligned} \quad (6)$$

我們可以加上一些 0 的數值，假設出一新的數列

$$\begin{aligned} R &= \{p_1, p_2, p_3, p_4, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\} \\ S &= \{C_0, C_1, C_2, C_4, \mathbf{0}, C_3, C_2, C_1\} \\ T &= \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8\} \end{aligned} \quad (7)$$

則 T 是 R 與 S 兩矩陣的 convolution，因此，使用 FFT，

$$FFT(\mathbf{T}) = FFT(\mathbf{R}) \cdot FFT(\mathbf{S})$$

(6)式便直接可以計算出來。由文獻中知，convolution 僅需 $N \log N$ 次計算，記憶體不必增加，計算數減少。因此矩陣相乘變得可以計算。

上述結果，可以推廣到二維的計算當中。若

$$u_i = \sum C_{ij} P_j$$

則

$$\mathbf{U} = IFFT\{FFT(\mathbf{C}) \cdot FFT(\mathbf{P})\}$$

其中 \mathbf{C} ， \mathbf{P} 為類似(7)式之二維數列。

3.2 Inexact Newton-Bi-CGSTAB Method

本研究主要是求解(5)式。因為(5)式為非線性，因此無法直接求解。一般非線性的問題多以牛頓法求解，然而(5)式中，矩陣過於龐大，不可能求出其 Jacobian。因此，需用 Inexact Newton-Bi-CGSTAB method。這個方法分述如下列章節。

3.2.1 Newton-Raphson Method

一般而言，一非線性方程式，

$$F_i(h_1, h_2, \Lambda, h_N) = 0 \quad i = 1, 2, \Lambda, N$$

則

$$\mathbf{F}(\mathbf{h} + \delta\mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{h}) + \mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{h} + O(\delta\mathbf{h}^2)$$

其中， \mathbf{J} 為 Jacobian， $J_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial h_j}$

牛頓法就是依上述的性質導出，方法如下：

start: initial guess H_0

do while $|F(H_n)| > \varepsilon$

solve $dH = -J^{-1}(H_n)F(H_n)$

$$H_{n+1} = H_n + dH$$

end do

然而(5)式中，不可能求出 Jacobian，因此，需用 inexact Newton method 來求解。

3.2.2 Inexact Newton Method

Inexact Newton method[13]與 Newton Raphson method 非常類似。但是使用這個方法不必求 Jacobian。所以若 Jacobian 無法求得，或其 inverse matrix 無法求得時，可以用這個方法。方法如下：

start: initial guess H_0

find $F(H_0)$

Outer iteration: do while $|F(H_n)| > \varepsilon$

inner iteration: find some dH which satisfies

$$F'(H_n)dH = -F(H_n) + R_k \quad \text{where}$$

$$\|R_k\| / \|F(H_n)\| \leq \eta_k$$

end of inner iteration

$$H_{n+1} = H_n + dH$$

find $F(H_{n+1})$

end do

其中，inner iteration 不限定何種方法。目前有很多種方法發展出來，下一小節所說的 Bi-CGSTAB，是其中之一。

3.2.3 Bi-CGSTAB Method

Bi-CGSTAB 是源自 Optimization 中的 conjugate gradient 的一種方法。解 $AX = B$ 時，若矩陣 A 是 non-symmetric，則可用 Bi-CGSTAB [14]法，這個方法是用疊代法求解，且不必求任何 inverse matrix，也不必用高斯消去法，所以在僅能算出矩陣乘法時特別有用。在本研究中正好適用。Inexact Newton method 中的 inner iteration，求解 $F'(H_n)dH = -F(H_n)$ 時，正好可用這個方法。

Bi-CGSTAB 解 $AX = B$ 方法如下：

Initial guess X_0 , $R_0 = B - AX_0$

$$\text{set } \hat{R}_0 = R_0$$

$$\rho_0 = \alpha = \omega_0 = 1$$

$$V_0 = P_0 = 0$$

for $i = 1, 2, 3, \Lambda$

$$\rho_i = (\hat{R}_0, R_0), \quad \beta = (\rho_i / \rho_{i-1})(\alpha / \omega_{i-1})$$

$$P_i = R_{i-1} + \beta(P_{i-1} - \omega_{i-1}V_{i-1})$$

$$V_i = AP_i$$

$$\alpha = \rho_i / (\hat{R}_0, V)$$

$$S = R_{i-1} - \alpha V_i$$

$$T = AS$$

$$\omega_i = (T, S) / (T, T)$$

$$X_i = X_{i-1} + \alpha P_i + \omega_i S$$

if X_i small enough, the quit.

$$R_i = s - \omega_i T$$

end

因此，在每一個 inexact Newton method 的 iteration 中，假設

$$A = F'(H_n), \quad B = -F(H_n), \quad X = dH$$

則使用 Bi-CGSTAB 所求出的解正好是 dH 。

3.2.4 Preconditioner

Bi-CGSTAB 雖可以解出上述的問題，但當矩陣並非 diagonally dominant，非常不容易收斂。因此，必須使用 preconditioner 來加速收斂[15]。

Precondition 的概念就是，當 $AX = B$ 中的 A ，不是 diagonally dominant 時，找出 $M^{-1} \approx A$ 則 $MA \approx I$ ，因此 $MAX = MB$ 會比較容易求出解答。

在本研究的求解過程中， $A = F'(H_n)$ 這個矩陣很大，而且並非 diagonally dominant，因此需要找出 approximate inverse。

因為 $A = F'(H_n)$ 這個矩陣來自接觸力對應變的影響，而每一點對該點與週遭四點的影響最大。因此，我們取這五點的影響參數，矩陣的其它元素取為零，則可形成一 five-diagonal 新矩陣，對這新矩陣求 approximate inverse matrix M 即可。由本研究發現，運用 M 可加速收斂達四倍以上。

3.2.4 Keller's Path Following Method

在解非線性問題時，如果所得之解有 bifurcation 的現象，像本研究的圖二，就是一個例子，解的線有倒彎曲現象，不易求到想要的解。這時可使用 Keller 的 path following method[7、16]。這個方法的精神，是有已之點來沿著解的線，去求下一點。

這個方法下 Keller 定義一個新的函數

$$N = H_s(s_0) \cdot [H(s) - H(s_0)] + A_s(s_0) \cdot [A(s) - A_s(s_0)] - (s - s_0) \quad (8)$$

則解下列方程式

$$\begin{bmatrix} F_H & F_A \\ N_H & N_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta H \\ \delta A \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix} \quad (9)$$

則沿曲線的每一小步，及其解可求得。

其步驟如下，先求

$$\frac{\partial F}{\partial A} = F_A = 1$$

再解 H_A

$$F'(H)H_A = -F_A(s_0) = -1$$

則

$$N_A = A_s(s_0) = \pm[1 + H_A \cdot H_A]^{-1/2} \quad (10)$$

$$N_H = H_s = A_s H_A = N_A H_A \quad (11)$$

開始時，設

$$N = H_s(s_0) \cdot [H(s) - H(s_0)] + A_s(s_0) \cdot [A(s) - A(s_0)] - (s - s_0)$$

$s - s_0$ is given, 然後解(8)式。

如 Feng[18] 所述, 對每個 Newton iteration, 可以解

$$F'(H)Y = F_A(s_0)$$

$$F'(H)Z = -F(s_0)$$

則

$$dA = \frac{N_H \cdot Z + N}{N_H \cdot Y - N_A}$$

$$dH = Z - dAY$$

3.2.5 Numerical Scheme

本研究為解下式：

$$F(H_i) = H_i + A - \frac{(X_i^2 + Y_j^2)}{2} + \frac{32\mu^{3/2}}{3\pi} \sum C_{ij} \left[\frac{1}{(H_j + 1)^3} - \frac{1}{(H_j + 1)^9} \right]$$

1. 由(4)式, 算出 C_{ij} 。
2. 已知 A , 用 path following method 及 Inexact Newton method 求解。

(1) 起始值 H_0, A_0

由 eq(5) 算出 $F(H_0, A_0)$

由 eq(8) 算出 $N(H_0, A_0)$

由 eq(10、11) 算出 N_A, N_H

找出 $M \approx F'(X_0)^{-1}$

(2) 疊代直到 H_n, A_n 收斂

用 Bi-CGSTAB 與 preconditioner 解

$$a. \text{ 求 } \begin{cases} MF'(H_n)Y = MF_A(s_0) \\ MF'(H_n)Z = -MF(s_0) \end{cases}$$

$$b. \text{ 代入 } \begin{cases} dA = \frac{N_H \cdot Z + N}{N_H \cdot Y - N_A} \\ dH = Z - dAY \end{cases}$$

$$c. \text{ 求得 } \begin{cases} H_{n+1} = H_n + dH \\ A_{n+1} = A_n + dA \end{cases}$$

d. 求 $F(X_{n+1}, A_{n+1}), N(X_{n+1}, A_{n+1})$

3. 重覆 2, 解下一個 A 。

Result

本研究使用 P4, 1.8GHz, 256MRam 的個人電腦, 配合 Fortran 90 與 IMSL 作計算。結果發現, 在本論文探討的 case 中可行, 但若要更多格點或更大的 μ 時, 可能要用工作站或平行電腦方可行。

本研究首先用 Wu[17] 的方法模擬出 256×256 點的粗糙表面。首先, 先作以 $S = 5$ 模擬出三個不同的粗糙表面, 測試 $\mu = 1$, $S = 5$ 的 P 對 A 圖, 如圖一。結果相差不多, 表示本研究方法沒有問題, 但需注意, 同樣的 S 之下, 會有變異性。

其次, 測試 $\mu = 1$, $S = 3, 5, 10$ 的比較, 結果發現, $S = 3$ 有 bifurcation 的現象, $S = 5, 10$ 則沒有。結果也發現越粗糙的表面, 吸引力越小。雖然粗糙度小的平面吸引力大, 但斥力增加的也快。

本研究也針對 μ 的變化作研究, 圖三為 $S = 5$, $\mu = 0.1, 1$ 的比較。發現, μ 越大, 距離較遠時就開始有吸引力, 相對的吸引力大, 排斥力小。

跳接觸的現象雖不在本研究的範圍, 但由結果可預估 μ 越大越容易有跳接觸的現象。

5. Conclusion

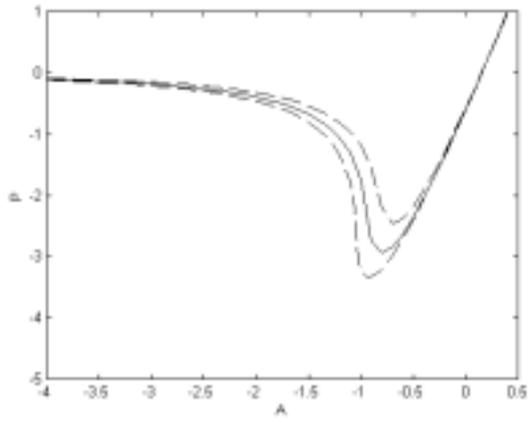
本研究使用直角座標系方法求解粗糙表面之吸引彈性力分析。結果可用個人電腦解出。從本研究探討的 case 中發現, 粗糙表面的彈性吸引接觸有 bifurcation 的現象。

未來與實驗作比較, 也可加入塑性變形, 研究跳接觸的力量, 可進一步了解對微奈米接觸現象。

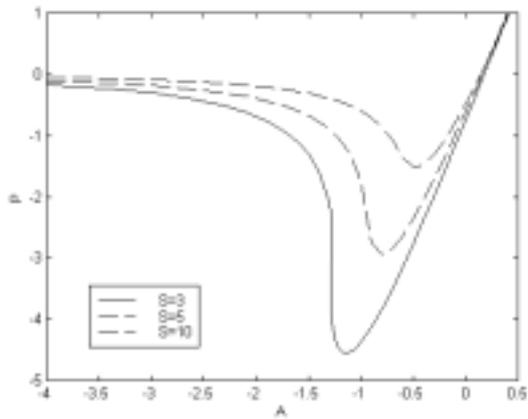
Reference:

1. Miesbauer, O., Götzinger, M. and Perukert,

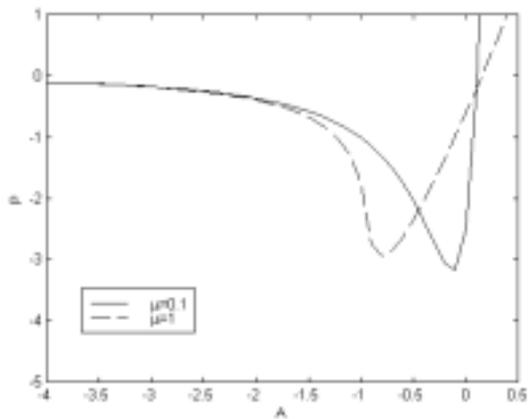
- W., "Molecular dynamics simulations of the contact between two NaCl nano-crystals: adhesion, jump to contact and indentation", *Nanotechnology*, Vol. 14, pp. 371-376, 2003.
2. Johnson, K.L., Kendal, K. and Roberts, A.D., "Surface energy and the contact of elastic solids", *Proc. R. Soc. London, A*, 324, pp. 301-313, 1971.
 3. Derjaguin, B.V., Muller, V.M. and Toporov, Yu.P., "Effect of contact deformations on the adhesion of particles", *Journal of Colloid and Interface Science*, Vol. 53, No. 2, pp. 314-326, 1973.
 4. Maugis, D., "Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using Dugdale model", *J. Coll. Interf. Sci.*, Vol. 150, pp.243-269, 1992.
 5. Attard, P. and Parker, J.L., "Deformation and adhesion of elastic bodies in contact", *Phys. Rev. A*, Vol. 46, No. 12, pp. 7975-7971, 1992.
 6. Greenwood, J.A., "Adhesion of elastic spheres", *Proc. R. Soc. London, Vol. A* 453, pp. 1277- 1297, 1997
 7. Feng, J.Q., "Contact behavior of spherical elastic particles: a computational study of particle adhesion and deformations", *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, Vol. 172, pp. 175-198, 2000.
 8. Wu, J.-J., "Numerical method on adhesive contact between elastic surface in rectangular coordinate", submitted to *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*.
 9. Johnson, K.L., *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
 10. Mulvaney, D.J., Newland, D.E. and Gill, K.F., "A complete description of surface texture profiles", *Wear*, Vol. 132, pp. 173-182, 1989.
 11. Love, A.E.H., "The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary", *Phil. Trans. Roy. Soc. (London) Series A*, Vol. 228, pp.377-420, 1929.
 12. .Liu, S.B., Wang, Q. and Liu, G., "A versatile method of discrete convolution and FFT (DC-FFT) for contact analyses", *Wear*, Vol. 243, No. 1-2, pp. 101-110, 2000.
 13. Dembo, R.S., Stanley, C.E., Eisenstat, C. and Steihaug, T., "Inexact Newton methods", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 19, No.2, pp. 400-408, 1982.
 14. Van Der Vorst, H.A., "Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 13, No. 2, pp. 631-644, 1992.
 15. Benzi, M., "Preconditioning techniques for large linear systems: a survey", *Journal of Computational Physics*, Vol. 182, pp.418-477, 2002.
 16. Keller, H.B. "Numerical solution of bifurcation and non-linear eigenvalue problems", in: Rabinowitz, P. (ed.), *Applications of Bifurcation Theory*, pp. 359-384, Academic Press, New York, 1997.
 17. Wu, J.-J., "Simulation of rough surfaces with FFT", *Tribology International*, Vol. 33, pp. 47-58, 2000.



圖一 , A vs. P for $\mu = 1$, $S = 3$



圖二 , A vs. P for $\mu = 1$



6. 計劃成果自評：

本計畫成果符合預期，可應用於奈米級表面接觸上。相關成果已發表於九十二年中國機械工程師學會研討會。