

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

RSSR 連桿機構之合成

The Synthesis of RSSR Linkage

計畫編號：NSC90-2212-E-034-003

執行期限：90年8月1日至91年7月31日

主持人：鐘文遠 中國文化大學機械工程學系

計畫參與人員：張曉芬 中國文化大學機械工程學系

一、中文摘要

RSSR連桿組之應用，主要為函數機構以及急回機構。對於兩種應用，先個別推導出所需符合之基本方程式。方程式中之待求變數或未知數，乃將連桿組之桿長及其餘尺寸經適當乘積及組合後而得。連桿組之歪斜角則視為指定值或已知值。若輸出入角度亦為已知，則方程式為線性。合成連桿組時，僅需解數個線性聯立方程式。而各調整後之變數亦可被迅速求得，進而求得各桿長及尺寸。

合成過程中，另可配合適當之目標函數，以得最佳連桿組。另舉多個數值例以供說明。

關鍵詞：函數機構、急回機構、傳力角

Abstract

The RSSR linkage can be generally used as a function generator or a quick return mechanism. The necessary equations that have to be satisfied for both applications are first derived. The unknown parameters in the equations are defined delicately by multiplying and combining the lengths of several links and other dimensions. The skewed angle is treated as a given value. As a result, several linear equations can be combined together to solve the unknown parameters efficiently. The lengths of all links and offsets can then be found to synthesize this linkage.

Appropriate objective functions can also be defined and used in synthesizing process to get an optimal linkage. Several numerical examples are given for illustration.

Keywords: Function Generator, Quick Return Mechanism, Transmission Angle

二、緣由與目的

RSSR 連桿機構為最常見之空間四連桿，該連桿組之輸入桿及輸出桿以旋轉對和基座連接，而耦桿則以球面對分別和輸入桿及輸出桿連接。其在應用上著重於輸入桿及輸出桿之角度關係，主要應用例為函數機構以及急回機構。

函數機構為輸入桿與輸出桿之旋轉角度成一定之函數關係，合成時可分高階合成及指定精確點兩種方法。高階合成以四階合成為代表〔Devanathan and Soni, 1984〕。而以指定精確點方式合成時，多以描述輸入桿及輸出桿之角度關係的位移方程式為主要工具；最多可合成一連桿組以符合八組精確點〔Rao, Sandor, Kohli, and Soni, 1972〕。當指定之精確點較少時，其餘之自由度則可用於選擇較佳之連桿組，主要以傳力角最佳化為主〔Angeles and Bernier, 1987； Gupta and Kazerounian, 1983； Sutherland and Roth, 1973〕，且須輔以最佳設計之數學運算工具。此外，位移矩陣配合倒置之運用，亦可用於合成指定精確點之函數機構〔Suh, 1968〕。

急回機構主要針對曲柄搖桿機構，其中輸出桿之搖桿於回程旋轉時所需之時間較去程為短。合成時多以輸出桿於兩個極限位置時之幾何關係為啟始〔Lakshminarayana and Rao, 1984； Rao and Lakshminarayana, 1984〕；亦可應用投影之概念以圖解法合成〔Lakshminarayana and Rao, 1984〕。由於指定急回機構之條件後，尚有多餘之自由度，可用於配合傳力

角之最佳化 [Söylemez and Freudenstein., 1982]。另外，將多個方程式中之變數適當設定，可簡化求解之過程 [Suareo and Gupta, 1988]。

三、研究內容

(一) RSSR 連桿組及基本方程式

RSSR 為最常見且最常被研究之空間四連桿機構。如圖一所示， A_0A 為輸入桿，其桿長為 a ，且以 A_0 之旋轉對 (revolute pair) 繞著 Z 軸旋轉；而輸出桿 B_0B 之桿長為 c ，以 B_0 之旋轉對繞著 z 軸旋轉。耦桿 AB 之桿長為 b ， A 及 B 皆為球面對 (spherical pair)。 Z 軸與 z 軸之距離 $\overline{P_1P_2}$ 為 d ，且夾角為 α 。點 A_0 與 P_1 之距離為 g ，點 B_0 與 P_2 之距離為 h 。 d 、 α 、 g 和 h 皆以圖一所示為正。另外， Y 軸平行於兩旋轉軸 (Z 軸及 z 軸) 之公垂線 (P_1P_2)； XYZ 坐標系之原點為 A_0 。 y 軸平行於 Y 軸且 xyz 坐標系之原點為 B_0 。

合成一連桿組，主要為使其在某些特定位置時，可符合所定之要求。該類要求如：輸入角與輸出角之關係、輸入角與輸出桿之轉速的關係、以及輸入角與傳力角之關係等。以下將分別加以略述。

輸入桿角度與輸出桿角度之關聯方程式可由圖一之幾何關係加以推導。 θ 以輸入桿與 X 軸重合時為零， ϕ 以輸出桿與 x 軸重合時為零，兩者皆以逆時針為正。若以 XYZ 坐標系表示， A 、 B 兩點坐標可表為

$$\begin{aligned} A: & (a \cos \theta, a \sin \theta, 0) \\ B: & (h \sin \alpha + c \cos \alpha \cos \phi, \quad d + c \sin \phi, \\ & h \cos \alpha - g - c \sin \alpha \cos \phi) \end{aligned} \quad (1)$$

再由耦桿 AB 之桿長為 b ，可得以下之方程式

$$[A - B]^T [A - B] = b^2 \quad (2)$$

或可調整變數後，表示為

$$\begin{aligned} E_1 ac + E_2 ad + E_3 cd + E_4 ah + E_5 cg \\ + E_6 H = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} E_1 &= -2 \cos \theta \cos \phi \cos \alpha - 2 \sin \theta \sin \phi \\ E_2 &= -2 \sin \theta \\ E_3 &= 2 \sin \phi \\ E_4 &= -2 \cos \theta \sin \alpha \\ E_5 &= 2 \cos \phi \sin \alpha \\ E_6 &= 1 \\ H &= a^2 - b^2 + c^2 + d^2 + g^2 + h^2 \\ &\quad - 2gh \cos \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

為求得輸入角與輸出桿之轉速的關係，可對式(2)加以微分得

$$[\dot{A} - \dot{B}]^T [A - B] = 0 \quad (5)$$

其中， \dot{A} 及 \dot{B} 可分別表示為 [Suh and Radcliffe, 1978]

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \dot{\theta} [P_a] \{A - A_0\} \\ \dot{B} &= \dot{\phi} [P_b] \{B - B_0\} \end{aligned} \quad (6)$$

$[P_a]$ 及 $[P_b]$ 為以 Z 及 z 軸為中心之 3×3 的旋轉矩陣。將(6)式代入(5)式，經整理可得

$$\frac{\dot{\phi}}{\dot{\theta}} = \frac{ac(\sin \theta \cos \phi \cos \alpha - \cos \theta \sin \phi) - ad \cos \theta + ah \sin \theta \sin \alpha}{ac(\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \alpha) - cd \cos \phi + cg \sin \phi \sin \alpha} \quad (7)$$

當輸出桿位於極限位置時，則 $\dot{\phi} = 0$ ；因而可得

$$F_1 ac + F_2 ad + F_4 ah = 0 \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} F_1 &= \sin \theta \cos \phi \cos \alpha - \cos \theta \sin \phi \\ F_2 &= -2 \cos \theta \\ F_4 &= \sin \theta \sin \alpha \end{aligned} \quad (9)$$

傳力角 δ 為沿著耦桿之方向向量與 B 點之瞬間速度方向之夾角。 B 點之速度，若以 xyz 座標表示，則為沿著向量 $(\mp \sin \phi, \pm \cos \phi, 0)$ ；其中 \pm 號為輸出桿正轉或反轉時之不同狀況。將耦桿之方向向量導出且經適當的座標轉換後，傳力角 δ 可推導而為

$$\begin{aligned} b \cos \delta &= \pm a \cos \theta \sin \phi \cos \alpha \mp c g \sin \alpha \sin \phi \\ &\quad \mp a c \sin \theta \cos \phi \pm d c \cos \phi \end{aligned} \quad (10)$$

為避免 \pm 號之困擾，可將(10)式兩邊平方；以及代入式(3)，可得

$$C_{ss} \sin^2 \theta + C_{sc} \sin \theta \cos \theta + C_{cc} \cos^2 \theta + C_s \sin \theta + C_c \cos \theta + C_o = 0 \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} C_{ss} &= 4a^2d^2 - 4a^2c^2 \\ C_{sc} &= 8a^2dh \sin \alpha \\ C_{cc} &= 4a^2h^2 \sin^2 \alpha - 4a^2c^2 \cos^2 \alpha \\ C_s &= -4adH + 8ac^2d \\ C_c &= -4ahH \sin \alpha + 8ac^2g \sin \alpha \cos \alpha \\ C_o &= H^2 + 4b^2c^2 \cos^2 \delta - 4c^2g^2 \sin^2 \alpha - 4c^2d^2 \end{aligned} \quad (12)$$

(二) RSSR 連桿組合成方法及舉例

合成一連桿，將盡量解數個線性聯立方程式，以求得連桿之尺寸。一般而言，連桿組之歪斜角 α 由設計者所指定。若連桿組於精確點或極限位置等關鍵位置時之輸出入角度，可再予以指定；則可得數個線性聯立方程式。其中，待求之變數則可指定為 ac 、 ad 、 cd 、 ah 、 cg 及 H 等六項。當有五個方程式時，便可求得上述六變數之比例關係。進而可求得 a 、 b 、 c 、 d 、 g 及 h 等桿長及尺寸。

當欲合成一 RSSR 連桿組，以符合五組相對應之輸出角 (θ_i) 及輸入角 (ϕ_i) 時。若 α 角已指定，則可代入式(3)，針對各組對應之輸出入角度，分別求得 E_1 、 E_2 、... 及 E_6 。進而求得桿長及尺寸。

例題一：指定 $\alpha = 70^\circ$ ，對應之五組輸入及輸出角度為 (30.0 40.0)、(50.0 50.0)、(70.0 60.0)、(90.0 70.0) 及 (110.0 80.0)。

解：代入式(3)，得五組 E_1 、 E_2 、... 及 E_6 。以 ac 為已知，解聯立方程式，可得 ac ： ad ： cd ： ah ： cg ： H = 1：-1.4941：-2.7156：0.5198：-0.0692：4.0394。若令輸出桿之桿長 $c=1$ ，其餘桿長及尺寸可依序求得為： $d = -1.4941$ 、 $a = 0.5502$ 、 $h = 0.5198$ 、 $g = -0.0381$ 及 $b = 1.2640$ 。

RSSR 連桿組當函數機構時，若輸出入之初始角度及 α 角為未知，最多可指定八對精確點。現若僅指定五組精確點及 α 角，則剩餘有二個自由度。此二個自由度，

可用於調整輸出入桿之初始角度。當輸出入桿之初始角度指定後，連桿組可如前例之模式求得。

若欲合成較佳之連桿組，可藉由掃描或最佳化程序，以得適當之輸出入桿初始角組合。進而合成較佳之連桿組。

例題二：如 [Gupta and Kazerounian, 1983] 之數據，指定 $\alpha = 90^\circ$ ，對應之五組輸入及輸出偏移角度 ($\Delta\theta, \Delta\phi$) 為 (0.0 0.0)、(19.41 -5.125)、(53.03 -30.165)、(91.85 -69.695) 及 (125.57 -94.735)。

解：當給定任一組輸出入桿之初始角度時，則可如例一以求得連桿組。對於不同組合之輸出入桿初始角度，可求得連桿組之尺寸，檢視適當之目標值，從而擇其較優者。

如圖二所示，對於不同輸出入桿初始角度之組合，檢視其輸入桿整圈旋轉時之最大傳力角。圖中標示 90 之區間為輸入桿無法 360 度旋轉。最小之最大傳力角值如圖所示約為 40 度附近。可指定輸入桿初始角度為 280 度，輸出桿初始角度為 300 度時，以合成連桿組。

連桿組當急回機構時，輸入桿應為可 360 度旋轉之曲柄，而輸出桿則為僅能部分旋轉之搖桿。合成時之主要指定為時間比及輸出桿之搖擺角度。若 α 角為指定值，則仍餘有三個自由度。若再指定輸出入桿之初始角度，則仍剩有一個自由度。數學上，此時之未知數為五個，也就是 a 、 b 、 c 、 d 、 g 及 h 等各桿之桿長及尺寸之比值。而方程式則共可寫出四組——輸出桿位於極限位置時，所對應之輸出入桿角度，可得兩個如式(3)之方程式；並且此時輸出桿之瞬間轉速為零，可寫出另兩組如式(8)之方程式。

對於所餘之唯一自由度，可依需求加以適當應用。例如，由上述之四組方程式，可使連桿組之桿長及尺寸皆可以一變數(如 a/c) 表示。若欲針對特定之輸入角作傳力角之最佳化，可代入式(11)。此時，式(11)中除目標函數值-傳力角 δ -外，僅含一變數(如 a/c)。經由微分，便可求得使傳力角 δ 為極值時，該唯一變數之值。進而可求得

連桿組之桿長及尺寸。此外，所餘之唯一自由度，可用以指定另一組輸出入桿之對應角度。且以下例說明之。

例題三：指定 $\alpha=45^\circ$ ，時間比為1.2，輸出桿之搖擺角度為 60° 。另外在前進階段中，指定當輸入桿於旋轉50%之前進角度時，相對應之輸出桿則搖擺40%之總搖擺角度。

解：指定一組輸出入桿之初始角度，既可得到五組方程式。其中三個如式(3)，另兩個如式(8)。進而可合成一連桿組。

圖三所示乃與例題二之圖二相似。最小之最大傳力角值如圖所示約為45度附近。可指定輸入桿初始角度為70度，輸出桿初始角度為160度時，以合成連桿組。

四、討論

對於函數機構或急回機構，所需處理之方程式皆為線性。除了可迅速求得各未知數，更可避免處理因高次方程式所衍生之不適合之解或虛根之問題。

求解時，一般為解五個聯立方程式。其餘自由度則為輸出入桿之特定角度的指定。除了使設計者易於指定外；亦可採用掃描法，以確保搜尋範圍之完整性。

設計者亦可於掃描過程中，依照所需，指定適當之目標函數，以求得適合之連桿組。

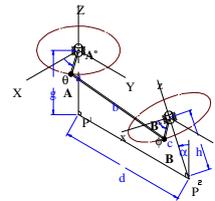
五、參考文獻

1. Angeles, J. and Bernier, A., 1987, "The Global Least-Square Optimization of Function-Generating Linkages", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 109, pp. 204-209.
2. Devanathan, B. T. and Soni, A. H., 1984, "Higher-Order Synthesis of an RSSR Mechanism with Application", Mechanism and Machine Theory, Vol. 19, No. 1, pp. 85-96.
3. Gupta, K. C. and Kazerounian, S. M. K., 1983, "Synthesis of Fully Rotatable R-S-S-R Linkages", Mechanism and Machine Theory, Vol. 18, No. 3, pp. 199-205.
4. Lakshminarayana, K. and Rao, L., 1984, "Optimal Designs of the RSSR Crank-Rocker Mechanism - II. Unit Time Ratio and Limits of Capability", Mechanism and Machine Theory, Vol. 19, No. 4/5, pp. 443-448.
5. Lakshminarayana, K. and Rao, L., 1984,

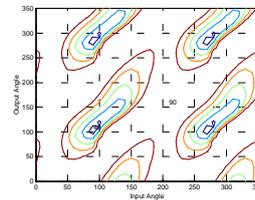
"Graphical Synthesis of the RSSR Crank-Rocker Mechanism", Mechanism and Machine Theory, Vol. 19, No. 3, pp. 331-336.

6. Rao, A. V. M., Sandor, G. N., Kohli, D., and Soni, A. H., 1972, "Closed Form Synthesis of Spatial Function Generating Mechanism for the Maximum Number of Precision Points", ASME Paper No. 72-Mech-54.
7. Rao, L., and Lakshminarayana, K., 1984, "Optimal Designs of the RSSR Crank-Rocker Mechanism - I. General Time Ratio", Mechanism and Machine Theory, Vol. 19, No. 4/5, pp. 431-441.
8. Söylemez, E. and Freudenstein, F., 1982, "Transmission Optimization of Spatial 4-Link Mechanisms", Mechanism and Machine Theory, Vol. 17, No. 4, pp. 263-283.
9. Suareo, F. O. and Gupta, K. C., 1988, "Design of Quick-Returning R-S-S-R Mechanisms", ASME Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 110, pp. 423-428.
10. Suh, C. H., 1968, "Design of Space Mechanisms for Function Generation", Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Industry, pp. 507-512.
11. Sutherland, G. and Roth, B., 1973, "A Transmission Index for Spatial Mechanisms", Transaction of the ASME, Journal of Engineering for Industry, pp. 589-597.

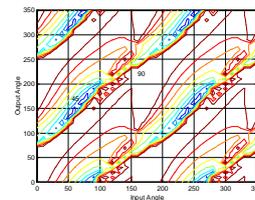
圖表彙整



圖一: RSSR連桿組



圖二:例題二不同初始輸出入角之目標值



圖三:例題三不同初始輸出入角之目標值

