

# 捷運車輛動態系統數學模式建立與振動分析

## The Establishment of Mathematical Model and the Vibration Analysis of Mass Rapid Transportation System

計劃編號：NSC-88-2212-E-034-001

執行期限：87年8月1日至88年7月31日

主持人：吳俊仲 中國文化大學機械系

### 一、中文摘要

本文假設捷運系統電聯車以車廂、轉向架和車輪及各懸吊系統所組成，各剛體之間以懸吊系統相連接，建立列車在垂直方向的動態系統之數學模式，以進行電聯車垂直方向振動分析。

關鍵字：振動、電聯車、轉向架

### Abstract

This paper assumes that an MRT vehicle is composed of track, bogie and wheel. All of them are connected by suspension systems. By the assumption, the mathematical model of railway vehicle is established and the vibration in the vertical direction is investigated.

**Keywords :** Vibration, MRT Vehicles, Bogie,

### 二、前言

捷運系統電聯車可以車廂、轉向架和車輪及各懸吊系統來代表[1]。我們可將這些系統整合並建立合理的數學模式，來進行電聯車垂直方向振動分析探討。研究列車於不同速度行駛時，因軌道的不平整對車輪、轉向架、車體所產生的振動。一般進行此方面研究所採用的數學模式大部份以力學的方法，導出模擬軌道列車運動的常微分方程式，經由數值積分方式預測軌道列車的運動，用來研究車輛的動態行為，採用的數學模式大部份以線性理論為主，

主要是經由轉換函數來研究各子系統的動態反應，以頻譜方式來表示。

本文建立列車在垂直方向的動態系統之數學模式，進行電聯車垂直方向振動分析探討。並以高雄捷運系統目前的基本規劃，探討電聯車垂直方向振動。

### 三、數學模式的建立

車輛在軌道上運行因軌道不平整或轉彎，均會造成車輛運動，車輛的動態研究主要可從車輛的(1)上下方向的運動；(2)左右方向的運動來研究。

車輛系統模擬成由車體、轉向架與輪軸等部份組成。車體與轉向架主要以二次懸吊系統連接，轉向架與車軸主要以主懸吊系統連接。

為探討因軌道不平整而造成車輛垂直方向的振動所建立的系統模式不宜過於複雜。一般捷運車輛，包含車體，前後端二個轉向架，每個轉向架包含二組車軸，四個車輪。

本研究所建立的數學模式中假設

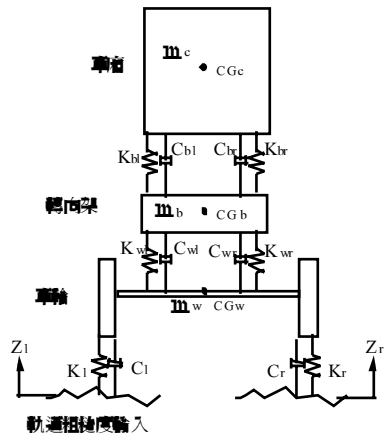
- (1)車體、轉向架和車輪均為剛體，質量集中於質量中心(如圖一)。
- (2)車體、車輪和轉向架允許上下的運動。
- (3)主懸吊系統與次懸吊系統可簡化成由彈簧和阻尼器組成，分別置於質量中心左方和右方。主、次懸吊系統為線性。
- (4)每個自由度相關的運動很小，而在運動方程式中僅包含線性項。
- (5)轉向架與車輪之間必並無摩擦力。
- (6)列車是左右對稱。
- (7)轉向架架框與車軸沒有側向的空間允許滑動(即無遲滯現象)。

(8) 列車以等速在剛性等距的軌道行進。

(9) 車輪與軌道一直保持接觸。

系統是為三個自由度，請參考圖一。其運動方程式為

$$\ddot{\phi} + M^{-1}C\dot{\phi} + M^{-1}K\phi = M^{-1}K_w\bar{X} \quad (1)$$



圖(一) 車輛系統模式示意圖

其中 \$M, C, K\$, 為 \$3 \times 3\$ 矩陣, 分別為質量、阻尼係數、彈性係數所組成, \$K\_w\$ 為軌面與車輪接觸彈性係數, \$\phi\$ 為各個剛體的位移, \$\bar{X}\$ 為系統的垂直輸入。

方程式(1)可經轉換, 寫成狀態方程式

$$\dot{X} = AX + B\bar{X} \quad (2)$$

$$\text{而, } X = \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}$$

$$, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}K \end{bmatrix}$$

\$O\$ 為 \$3 \times 3\$ 零矩陣, \$I\$ 為 \$3 \times 3\$ 單位矩陣, \$A\$ 為 \$6 \times 6\$ 矩陣, 方程式(2)作為動態分析的基礎。

#### 四、分析

探討捷運車輛的分析, 可分為:

##### 1. deterministic analysis:

以系統的動態方程式(2)為基礎, 應用線性理論探討本系統的傳輸函數, 系統的輸入是軌道不平整, 輸入函數進入系統可進行分析各變數的傳輸函數 \$H(\omega)\$, 經由傳輸函數可以瞭解系統中車體、轉向架和車輪的共振頻率。接著經由系統的輸入求得動態系統的反應。

##### 2. stochastic analysis:

國內捷運系統對於軌道不平整並無標準或統計資料, 本文將採美國鐵道標準資料作為輸入, 來預估系統動態反應及頻譜能量反應圖等。

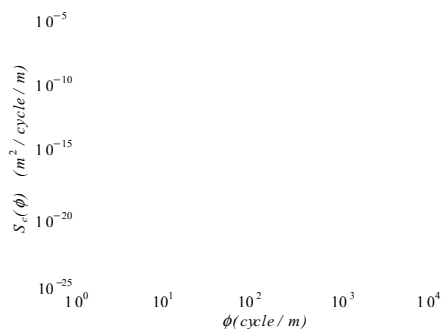
#### 五、輸入

軌道的不平整可用函數來表示, 本研究以頻率函數來表示, 其一般式如下 [2、3]:

$$S_c(\phi) = \frac{A_c \phi^{2.2c}}{(\phi^2 + \phi_{lc}^2)(\phi^2 + \phi_{2c}^2)} \quad (3)$$

式中 \$\phi = f/v\$, \$f\$ 為頻率, \$v\$ 為速度, \$A\_c, \phi\_{lc}, \phi\_{2c}\$ 為參數。

一般工程上以 \$S\_c(\phi)\$ 空間能量頻譜密度圖 (power spectral density) 來表示軌道或路面的不平整, \$S\_c(\phi)\$ 是 \$\phi\$ 的函數, \$\phi\$ 是波長數 (wave number) 其單位為 cycle/m, 波長數越大表示波長越短。圖二所示為不同波長數之下, 軌面不平整度的平方值。



圖(二) 軌面不平整度的平方值

利用 \$\phi = f/v\$ 及能量相同的觀念, 可將空間能量頻譜密度圖轉換成時間上頻譜密度圖, \$S\_c(f)\$。因能量相同, 所以

$$S_c(\phi)d\phi = S_c(f)df$$

利用 \$\phi = f/v\$, 所以

$$S_c(f) = S_c(\phi)/v$$

$$(4)$$

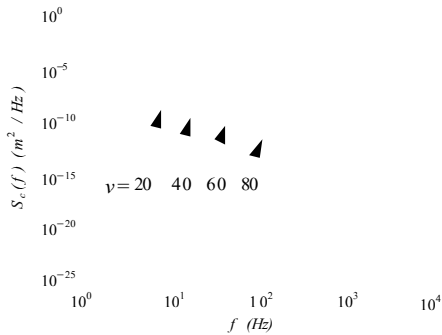
\$S\_c(f)\$ 表示時間上頻譜密度圖。利用方程式(4), 將 \$\phi = f/v\$ 代入方程式(3),

$$S_c(f) = \frac{A_c \phi^{2.2c} v^3}{(f^2 + v^2 \phi_{lc}^2)(f^2 + v^2 \phi_{2c}^2)} \quad (5)$$

從方程式(5)可知 \$S\_c(f)\$ 是頻率與速度的函

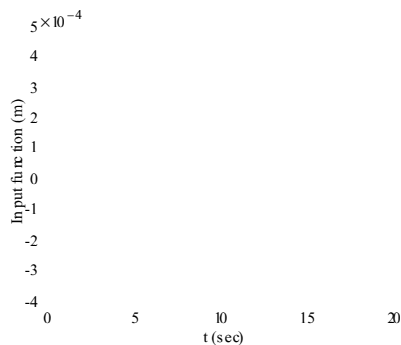
數，圖三顯示不同速度時軌道不平整頻譜密度圖( $S_c(f)$ )。當速度增加時，軌道不平整增加，高頻的軌道不平整其能量比低頻小。方程式(5)將做為捷運車輛行駛於主線上時不同速度分析的輸入，引用隨機理論及上述傳輸函數，可求得軌道車輛因受軌道表面不平整而產生的系統動態反應。

圖(三)代表在不同速度 20 ~80 km/hr 之下，變化頻率所得之軌道不平整平方值。



圖(三) 軌道不平整頻譜密度圖( $S_c(f)$ )

要探討列車對軌道不平整在時域上的反應，須將方程式(5)轉換成時域的函數，作為動態系統的輸入。方程式(5)可利用信號分析理論，經由 inverse FFT 得到時域的函數，作為系統的輸入，分析系統在時域上的動態反應。要將圖三轉換成時域函數，首先在頻率域上 0 到  $10^4$  Hz 產生一與原來對稱的實部[4]。利用亂數產生一虛假的相位，但和原來相位差一負號，再將實部與虛部利用 inverse FFT 即可得到時域的函數。若取速度  $v = 60$  km/hr，其不平整頻譜圖依上述轉換可得軌道不平整時域圖，如圖四。



圖(四) 輸入時域函數圖

## 六、頻譜密度函數

如果一穩定隨機過程  $x(t)$  的頻譜密度  $S_x(\omega)$  已知，則  $E[x^2]$  可經由計算  $S_x(\omega)$  所含蓋面積而得， $S_x(\omega)$  也可用來計算速度  $\dot{x}$  和加速度  $\ddot{x}$ ，因  $R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$

$$\frac{d}{d\tau}[R_x(\tau)] = E[x(t)\dot{x}(t+\tau)]$$

因為穩定過程，ensemble average 和時間  $t$  無關，所以

$$E[x(t)x(t+\tau)] = E[x(t-\tau)\dot{x}(t)]$$

得 
$$\frac{d}{d\tau}[R_x(\tau)] = E[x(t-\tau)\dot{x}(t)]$$

再次微分 
$$\frac{d^2}{d\tau^2}[R_x(\tau)] = -E[\dot{x}(t)x(t+\tau)] = -R_{\dot{x}}(\tau)$$

因為 
$$R_{\dot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega$$

微分可得 
$$\frac{d}{d\tau}[R_{\dot{x}}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} i\omega S_{\dot{x}}(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega$$

再微分得

$$\frac{d^2}{d\tau^2}[R_{\dot{x}}(\tau)] = -\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{\dot{x}}(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$R_{\dot{x}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega)e^{i\omega\tau} d\omega$$

$$S_{\dot{x}}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega) \quad (6)$$

所以從  $S_x(\omega)$  可算出均方速度值

$$E[\dot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_x(\omega) d\omega$$

從  $S_x(\omega)$  亦可算出均方加速度值

$$E[\ddot{x}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_x(\omega) d\omega$$

$$S_{\ddot{x}}(\omega) = \omega^4 S_x(\omega) \quad (7)$$

就一動態系統而言，轉換函數為  $H(\omega)$ ，若為單輸入頻譜為  $S(\omega)$  則輸出的頻譜密度為

$$S_x(\omega) = |H(\omega)|^2 S(\omega)$$

(8)

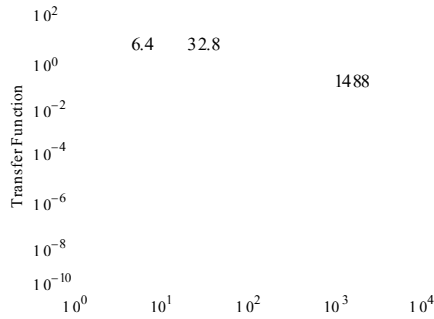
若以知動態系統位移之頻譜密度函數  $S_x(\omega)$ ，欲計算動態系統速度之頻譜密度函數  $S_{\dot{x}}(\omega)$  與動態系統加速度之頻譜密度函數  $S_{\ddot{x}}(\omega)$  可經由方程式(6)和(7)求得。

## 七、模擬

模擬的輸入，取自高雄捷運規劃車輛的基本數據[5、6]，詳細數據請參考附錄。

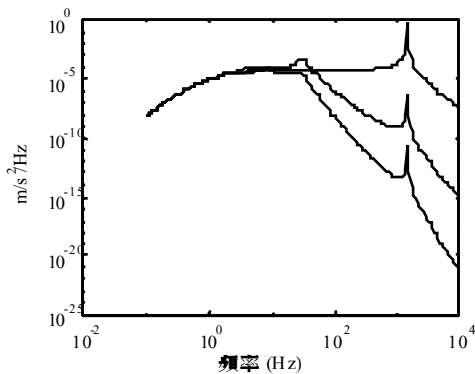
利用方程式(2)可得系統轉換函數，而轉換函數包含車廂、轉向架和輪軸的轉換

函數，模擬結果如圖五。從轉換函數圖中可發現車廂垂直模式的自然頻率為 6.4 Hz，轉向架的垂直自然頻率為 32.8 Hz，另外 1488 Hz 的頻率是車輪與軌道產生的自然頻率。



圖(五) 傳函函數圖

利用轉換函數和軌道不平整頻譜圖可算出車輪、轉向架與車廂的位移頻譜密度圖(利用方程式(8))，並可算出車輪、轉向架與車廂的加速度頻譜密度圖(利用方程式(6)，(7))，請參考圖六。



圖(六) 車輪、轉向架與車體振動頻譜圖

若取速度  $v = 60 \text{ km/hr}$ ，將軌道不平整頻譜密度圖轉換成時域上的軌道不平整的時域圖，之後輸入系統可得到車廂、轉向架和車輪對軌道不平整的動態反應。如圖七、八、九即為  $v = 60 \text{ km/hr}$  時，車輪、轉向架和車廂產生的加速度。

#### 八、結語

本文建立了列車系統在垂向模式的數學模式，並建立列車系統動態分析所需軌道不平整的模式，並將軌道不平整頻譜密度轉換成軌道不平整時間圖。本文已分析捷運車輛在不同的速度之下，受到軌道不

平整的激振時，車輪、轉向架和車體所產生的振動，並就時域與頻率域加以分析。

#### 參考文獻

- [1] Coenraad Esvels, "Modern Railway Track," 1989, p372.
- [2] Zhiyum Shen, The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks, Supplement to Vehicle System Dynamics, Vol. 23, 1993, p. 300.
- [3] Zhiyum Shen, The Dynamics of Vehicles on Roads and on Tracks, Supplement to Vehicle System Dynamics, Vol. 23, 1993, p. 337.
- [4] Newland D. E., "An Introduction to Random Vibrations and Spectral Analysis," 2nd edition, 1984, (longman Group, London)
- [5] 高雄捷運系統車輛系統特別技術規範，1995.
- [6] 高雄捷運系統車輛系統初步規劃，1993.

#### 附錄

車體質量： $m_c = 12090 \text{ kg}$ ，轉向架質量： $m_b = 7720 \text{ kg}$

輪軸質量： $m_w = 1268 \text{ kg}$

赫茲接觸彈簧剛度： $K_l = K_r = 1.4 \times 10^9 \text{ (N/m)}$

主懸吊彈簧剛度： $K_{wl} = K_{wr} = 4.32 \times 10^6 \text{ (N/m)}$

次懸吊彈簧剛度： $K_{bl} = K_{br} = 0.66 \times 10^6 \text{ (N/m)}$

軌道與輪軸接觸阻尼： $C_l = C_r = 600 \text{ (N.s/m)}$

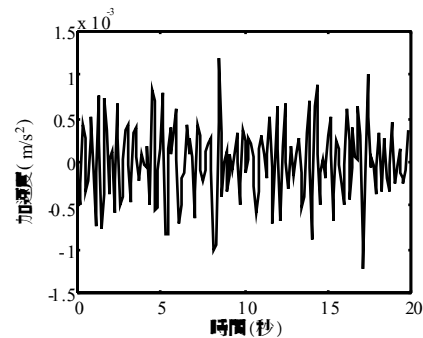
主懸吊彈簧阻尼： $C_{wl} = C_{wr} = 6000 \text{ (N.s/m)}$

次懸吊彈簧阻尼： $C_{bl} = C_{br} = 39000 \text{ (N.s/m)}$

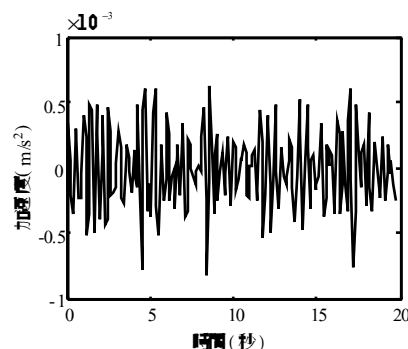
車體旋轉中心至次懸吊距離： $l_c = 1.05 \text{ m}$

轉向架質心至主懸吊距離： $l_b = 1.05 \text{ m}$

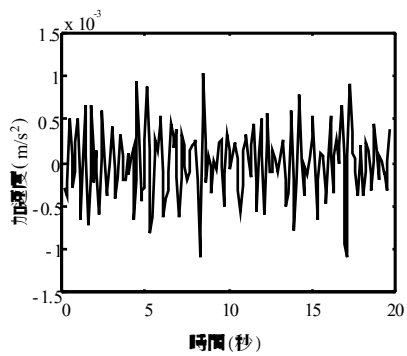
輪軸質心至主懸吊距離： $l_w = 0.7175 \text{ m}$



圖(七) 車輪加速度時間圖



圖(八) 轉向架加速度時間圖



圖(九) 車廂加速度時間圖