

- 一、(1) 試敘述實數完備 (complete) 性。 (10%)
 (2) 試求下列各集合的最小上界 (supremum) 及最大下界 (infimum)：

(a) $S = \{ \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \}$ (6%)

(b) $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x - 3 < 0 \}$ (6%)

(3) 設 $x_1 = \sqrt{3}$, \dots , $x_n = \sqrt{3 + x_{n-1}}$,

(a) 試言證明： $\{x_n\}$ 為遞增數列 (7%)

(b) 試求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (6%)

- 二、試判斷下列各集合是否為開集 (open set)、閉集 (closed set)、緊緻集 (compact set) 或連通集 (connected set)：

$A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2 \}$,

$B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1 \}$ (15%)

- 三、設 $f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ 定義為 $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$,
 $n = 1, 2, 3, \dots$ 為一組函數序列，而
 $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ 為一函數

(1) 設 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [0, 2]$, 試求函數 f (10%)

(2) 承上題，試問： $\{f_n\}$ 是否均勻收斂 (uniform converges) 到 f ? (10%)

四、設 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(1) 試判斷 f 在 $(0, 0)$ 點是否連續? (10%)

(2) 試求 f 在 $(0, 0)$ 點的偏導數 $f_x(0, 0)$ 及 $f_y(0, 0)$ (10%)

(3) 試問： f 在 $(0, 0)$ 點是否可微分? (10%)